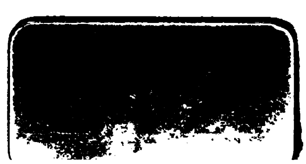


Begriffe

der matematiker.

Forwort

zur

darstellung des ferhältnisses, in dem di ſeiten am menshen, tire, gewäxe und steine stehen, und des ſo erhaltnen begriffes fom bau des menshen, tires, gewäxes und steines.

Riga und Leipzig, 1868.

In Riga bei Edmund Götschel, in Leipzig bei K. F. Köhler.

Der preis beträgt in Leipzig $\frac{2}{5}$ taler.

Inhalt.

Um das niht gewönlih geshribne deutsh rihtig zu leſen, ſind di wörter ſo zu leſen, das man zu wörtern komt, di man deutshe wörter [illegible]. Man wirt alſo not, geſez, kom nur ſo wi Noth, Geſetz, komm und niht anders, niht Nott, Geſeez, kohm leſen, weil, wenn man es täte, es niht-ſo mahte, wi man es mahen ſol. Wenn man etwas guten willen hat, ſo wirt man finden, das ſih das niht gewönlih geshribne deutsh leiht leſen läst, ja shon nah dem leſen einiger ſeiten bemerken, das es ſih leihter leſen läst als deutsh, wenn es ſo wi gewönlih geshriben ist.

Di figur der matematiker.

Euklid ſagt, *σχημα εστι το ὑπο τινος η τινων ὁρων περιεχομενον*, eine figur ist das, was ein oder einige enden hat.

Es ist einerlei, ob man *σχημα* figur (bild) oder gestalt überſezt; immer ist dabei zu bemerken, das, wenn fon einer figur oder gestalt gesprohen wirt, etwas hinzugedaht werden mus, wofon es eine figur (ein bild, eine zeihnung) oder eine gestalt ist, da zum begrif einer figur wi einer gestalt etwas gehört, durh das ſi erst begriffen werden, one das ſi niht begriffen werden können. Wolte Euklid ſagen, das endlihe ist das im äusern gewordne, eine äusrung, ein wort, ein zeihen, eine figur des unendlihen, ſo hätte er ſih anders ausdrükken müssen als er es getan hat.

Da in einem bilde (einer figur, zeihnung) des wirklihen das wirklihe wider (noh ein mal) geſehen wirt, oder das bild ein widershein des wirklihen ist, ſo mus das bild (di zeihnung) ſo wi das wirklihe geſehen werden, als etwas endlihes, wenn das wirklihe endlih, als etwas unendlihes, wenn das wirklihe unendlih ist, und erhält man alſo in einer figur (einem bilde) niht nur den begrif des endlihen, ſondern auh des unendlihen und zwar jenahdem das wirklihe endlih oder unendlih ist.

Unter den mit m P, o P, ∞ P bezeihneten gestalten ſind endlihe und unendlihe gestalten und begreift auh Nauman (*Lehrbuch der Krystallographie*, *Leipzig* 1830, I, 265) im shema (*σχημα*) der gestalten niht nur endlihe, ſondern auh unendlihe gestalten. Figuren ferhalten ſih aber wi gestalten und mus man ſih daher figuren ebenſo wi gestalten endlih und unendlih denken können, und müste dan fon einer endlihen und unendlihen gestalt (figur) di rede ſein.

Euklid begreift niht, das ſih eine bestimmung (definizion) wi eine gleihung ferhält; das, wenn auf der einen ſeite derſelben etwas endlihes ist, auh auf der andern etwas endlihes ſein mus, um di gleihung der bestimmung zu erhalten. Daher hätte er ſagen ſollen, *ὁριστον σχημα εστι το κ. τ. λ.* eine endlihe gestalt ist eine (gestalt), di ein oder einige enden hat, wodurh auf beiden ſeiten der bestimmung das endlihe (gleihes) erhalten würde.

Da man wirklih (logish) nur das erhalten kan, was man erhalten mus, aber niht, was man niht zu erhalten nötig hat, ſo wäre shon darin etwas niht logishes, das Euklid ſagt, ein oder einige enden, da nötig nur zu ſagen ist, was ein ende hat. Wenn eine flähe ein ende hat, ſo ist ſi endlih, und ebenſo, wenn ſi unzälige enden hat, und wäre alſo eine flähe, di ein ende hat, niht anders zu begreifen, als eine flähe, di unzälige enden hat.

Was ein ende hat, ferhält ſih wi das, was unzälige (file) enden hat. Ein kreis hat ein ende (eine ſeite), aber auh unendlih file enden (ſeiten), da di ſeite des kreiſes gleih unzäligen (filen) ſeiten ist, wenn man den kreis als fil-ek anſit, und mus man auh den kreis als ein fil-ek mit unendlih kleinen, unzälig filen ſeiten anſehen, wenn man den kreis niht einſeitig begreifen wil.

Hätte Euklid geſagt, eine figur ist eine zeihnung, etwas endlihes ist etwas, das ein ende hat, ſo wäre das etwas zu begreifendes, alein das, was Euklid ſagt, ist etwas niht zu begreifendes.

In *Elem. Euclidis libri*, *Lipsiae*, MDCCLXIX heist es: *Figura eſt, quae aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur*, eine figur ist eine (figur), welhe ein oder einige enden hat.

Wirt *το* auf *σχημα* bezogen, wi es der lateiniſhe überſezer Euklids getan hat, ſo bekäme man auf beiden ſeiten der bestimmung unbestimtes, was ebenſo wäre wi $x = x + a$, worin x eine figur und a das diſer zugeteilte ist, und wüste man alſo niht, was eine figur ist.

Stände *ὁριστον σχημα εστι το κ. τ. λ. terminata figura eſt*, *quae et cet.* eine endlihe figur ist eine, di u. ſ. w., ſo wäre es etwas rihtiges, aber dan müste doh immer forher geſagt werden, was eine figur ist wi Euklid ſagt, *ενϑεια γραμμη εστιν ἡτις κ. τ. λ. recta linea eſt*, *quae et cet.*, ein grader strih ist ein strih, der u. ſ. w., nahdem er forher geſagt hatte, *γραμμη μηκος απλατες*, *linea eſt longitudo non lata*, ein strih ist eine länge one breite.

Ebenſo unrihtig wi Euklids bestimmung dafon, was eine figur ist, ſind auh andre bestimmungen fon îm. Er ſagt, *επιφανειας περατα γραμμαι*, *ſuperficiei extrema ſunt lineae*, an einer flähe ſind di shranken strihe, alein an einer endlihen flähe ist das endlihe das niht unendlihe, an einer unendlihen flähe ist das unendlihe das endloſe. Das unrihtige in diſer Euklidshen bestimmung wi auh in der, *γραμμης περατα σημεια*, *lineae extrema ſunt puncta*, di shranken eines strihs ſind zeihen, ist aber auh leiht daraus nahzuweiſen, das Euklid ſagt, *ὁρος εστιν ὁ τινος εστι περας*, *terminus eſt quod alicuius eſt extremum*, ein ende ist di shranke fon etwas. Ist aber ein ende eine shranke an etwas, dan müssen an einer flähe (an etwas) di shranken enden (*ὁροι*), niht aber strihe (*γραμμαι*), und an einem strih (an etwas) di shranken ebenſo enden (*ὁροι*), niht aber zeihen (*σημεια*) ſein.

Euklid fängt ſein buh mit, *σημειον εστιν οὑ μερος ουδεν*, *punctum eſt, cuius pars nulla eſt*, ein zeihen (ein punkt) ist das, woran kein teil ist, an.

Fon allem und jedem kan man ſih etwas als einen teil dafon denken, woher das kein ding, ein unding oder nihts wäre, wofon man ſih niht etwas als teil dafon denken könte. Das, was Euklid ſagt, ist alſo eben ſo wi wenn man ſagte, ein zeihen ist nihts, alein wenn ein zeihen nihts ist, ſo kan man auh nur nihts in einem zeihen erhalten. Sol aber in einem zeihen etwas erhalten werden, ſo müste man ſih anders als Euklid ausdrükken und könte man ſagen, ein zeihen ist etwas, womit etwas bezeihnet wirt, weiter aber nihts, oder ein zeihen an etwas ist ein merkmal an etwas, ist etwas im fergleih zu dem, woran es erhalten wirt, äuserst geringes, fershwindend kleines. Ein zeihen ferhält ſih wi ein bild, eine zeihnung, und könte daher unendlih gros ſein, wäre aber doh, eben weil es ein bloses zeihen und niht das wirklihe

ist, am ende nur nihts, nihts weiter am ende als etwas, womit etwas bezeihnet wirt.

E ih Euklid angesehen hatte, glaubte ih, das Euklid das fon im bestimte gut bestimt haben würde, ih hatte also ein gutes forurteil für in, fand aber, als ih in aufshlug, niht gute, sondern äuserst shlehte bestimmungen. Zwar ist das, was ih fon im angefürt habe, nur wenig, alein es genügt, um darnah urteilen zu können, wi er im übrigen etwas bestimmen würde.

Brandes sagt in seinem *Lehrbuch der Geometrie*, *Oldenburg* 1810 S. 3:

Eine ringsum begränzte Fläche heiszt eine Figur, und zwar eine ebene Figur, wenn die Fläche eine Ebene ist.

Das, worauf man durh Euklid kommen mus, (eine endlihe flähe ist eine figur) darauf komt Brandes, denn da eine flähe, di ein ende hat (eine endlihe flähe) etwas ist, das ein ende hat, und etwas, das ein ende hat, nah Euklid, eine figur ist, so ligt in dem, was Euklid sagt, das eine endlihe flähe eine figur ist. Wi Euklid so begrif auh Brandes niht, das eine figur als etwas endlihes und unendlihes gedaht werden kan.

Wenn Brandes niht begrenzt, sondern *rings begränzt* glaubt sagen zu müssen, um in seiner bestimmung niht eine blos einseitig begrenzte flähe zu erhalten, so ist zu bemerken, das etwas begrenztes ringsum begrenzt sein mus, denn wäre es blos einseitig (beshränkt) begrenzt, so wäre es unbegrenzt. Wenn am unendlihen das endlihe ist, so kan nur das unendlihe erhalten werden, weil das endlihe am unendlihen nihts weiter am ende als ein fershwindender punkt, ein bloses zeihen, also nihts ist.

Brandes sagt, *eine ringsum begränzte Ebene heiszt eine ebene Figur*, was auh unrihtig ist, denn eine ringsum begrenzte ebne ist eine ebne, di ringsum begrenzt ist, und eine ebne figur eine figur, di eben ist. Brandes unterscheidet flähe und ebne so, das er in der einen das unebne, in der andern das ebne hat, alein der sprahe nah ist das flahe grade das ebne und nihts anderes, ist eine flähe eine ebne, was Brandes auh gesagt hätte, wenn er niht unrihtig flähe und ebne begriffe und am ende ebenso wi Euklid niht zu sagen weis, was eine flähe, eine figur, eine begrenzte flähe u. s. w. ist.

Das unrihtige in Brandesses begrif zeigt sih auh darin, das er da, wo er seiner bestimmung nah, figur erhalten müste, niht figur erhält, sondern flähe mit figur ferwexelt. Da seine *Parallelogramme*, *Prismas*, *Cylinder* endlihe gestalten sind, also an denselben endlihe flähen, di nah Brandes figuren heisen sollen, begriffen werden, so hätte Brandes ire flähen figuren, aber niht flähen nennen, niht *Flächen-Inhalt*, *Grundflächen*, *Oberfläche*, sondern *Figuren-Inhalt*, *Grundfiguren*, *Oberfiguren* sagen sollen. Zu bemerken ist dabei noh, das Brandes *Flächen-Inhalt eines Parallelogramms* sagt, alein, da ein parallelogram eine flähe ist, und eine flähe keinen andern inhalt als flähen-inhalt hat, niht auh einen raum-inhalt wi ein zylinder (eine walze), so ferstet es sih, das, wenn man inhalt eines parallelograms sagt, der inhalt di flähe des parallelograms sein mus, und hat man also niht nötig zu sagen, *Flächen-Inhalt eines Parallelogramms*. Was niht zu sagen nötig ist, mus niht gesagt werden, und hätte sih daher Brandes unlogish ausgedrükt.

Legendre ſagt, in ſeinen *Elementen der Geometrie, überſetzt von Crelle, Berlin* 1844:

Ebene Figur heiſzt eine, an allen Seiten von Linien begrenzte Ebene.

Werden di ſeiten der Legendreshen bestimmung umgekert, ſo bekomt man, *Eine, an allen Seiten von Linien begrenzte Ebene heiſzt ebene Figur,* alſo di Brandesshe bestimmung, *Eine ringsum begränzte Ebene heiſzt eine ebene Figur*, nur ſagte Legendre *an allen Seiten*, Brandes dafür *ringsum,* und ſagte Brandes niht *von Linien*, und hilte er alſo das für unnötig zu ſagen.

Legendre hätte niht ſagen ſollen, *Ebene Figur heiſzt — eine Ebene*, ſondern ebne figur heist — eine figur, weil in einer ebnen figur immer nur eine figur, eine bestimte art figur, niht aber gleih fil was erhalten werden kan, was Legendre niht begrif, obshon es doh leiht zu begreifen ist, und am ende nur deshalb fon Legendre niht begriffen wurde.

Beim ferſuh in di Legendreshe bestimmung ſin zu bringen, erhält man am ende *eine Figur iſt eine Figur, eine Ebene iſt eine Ebene.* Was Legendre erhalten wil, das läst ſih niht erhalten. Legendre glaubt in einer *Ebenen Figur eine, an allen Seiten von Linien begrenzte Ebene* zu erhalten, wirklih (logish) kan er ſi aber niht erhalten. Legendre weis ebenſo wenig wi Euklid und Brandes oder nur ebenſo unrihtig wi diſe zu ſagen, was eine figur, eine beshränkte flähe u. ſ. w. ist.

Nauman ſagt in ſeinem *Lehrbuch der Krystallographie, Leipzig,* 1830, I, 54:

Die Flächen werden nach der Zahl ihrer Seiten in drei-, vier-, fünf- ..... n-seitige Figuren getheilt.

n seitige Figuren? — n ſeitige flähen, hätte Nauman ſagen ſollen. Steine werden in fershidne arten steine, alſo flähen in fershidne arten flähen, figuren in fershidne arten figuren geteilt. Di fershidnen arten steine werden fershiden benant, qarz, feldspat, glimmer, und ſo werden di fershidnen arten flähen, di fershidnen arten figuren fershidne namen erhalten können. Di n ſeitigen flähen und ebenſo di n ſeitigen figuren (da ein bild fon etwas ſo benant wirt wi das wirklihe) kan man drei-, fir-, fünf-ekke u. ſ. w. nennen.

Alſo weis auh Nauman niht zu ſagen, was eine figur ist; er ferwexelt flähe mit figur, er weis niht, das eine n ſeitige flähe eine flähe mit n ſeiten ist.

Wi ih ſehe, bin ih dazu gekommen, Euklid, Brandes, Legendre, Nauman etwas forzuhalten, wofon man niht glauben ſolte, das man es inen, ſondern höhstens nur iren unfähigsten shülern forhalten könte, aber wirklih wi diſen forhalten kan und daher am ende auh mus, wenn man inen gereht werden wil.

Durh unrihtiges denken komt man dazu, das man etwas zu erhalten glaubt (Euklid, Brandes, Legendre, Nauman), was man doh im grunde (logish) niht erhält. Dagegen komt man durh rihtiges denken dazu wirklih zu erhalten, was man erhält und kan dabei niht fon einem blosen glauben di rede ſein wi wenn man niht reht begreift.

Di gröse der matematiker.

Euklid ſagt, *μερος εστι μεγεϑος μεγεϑους το ελασσον του μειζονος κ. τ. λ.*, *pars eſt magnitudo magnitudinis, minor maioris et cet.*, ein teil ist eine gröse einer gröse, der kleine des grosen u. ſ. w.

Teil und gröse ſezen etwas foraus, um ſi zu begreifen und können daher one dis niht begriffen werden. Wenn teil, gröse genant werden, ſo mus etwas hinzugedaht werden und zwar im zeuge-fal (genitif); ein teil eines dinges, di gröse eines dinges, und ferhält ſih alſo hirin teil wi gröse, woher Euklid hätte ſagen ſollen, der teil eines teiles ist di gröse einer gröse, und bekäme man dan, ein teil ist eine gröse, alein ein teil ist ein stük, und ist eine gröse keine kleinheit.

So einfah es zu ſagen sheint, was ein teil ist (weis niht jedes kind was ein teil ist?) und am ende auh ſer einfah zu ſagen ist, ſo weis es Euklid doh niht zu ſagen. Es lag doh wol nahe zu ſagen, ein teil ist niht das ganze, alein hirauf kam Euklid niht, ſondern auf etwas, was niht zu ferstehen ist.

Ohm ſagt in ſeinem *Lehrbuch der Mathematik*, *Leipzig* 1839, ſ. 3:

Begrenzte Zeiten, begrenzte Räume und begrenzte Kräfte nennen wir Gröſzen (Quanta). — Die Stetigkeit der Zeit, des Raumes und der Kraft iſt Urſache, daſz wir dieſe Gröſzen als benannte Zahlen (quantitates) ausdrücken können, darum heiſzen letztere ebenfalls Gröſzen.

Wi di zeit, der raum, di kraft, ſo kan auh di gröse beshränkt und niht beshränkt gedaht werden und ferhilte ſih alſo hirin zeit, raum, kraft wi gröse, woher Om hätte ſagen ſollen, *Begrenzte Zeiten — nennen wir begrenzte Gröſzen.* Es ist alſo etwas unrihtiges in Oms ausdruk und begreift er daher niht rihtig zeit, raum, kraft, gröse.

Begrenzte zeiten ſind zeiten, di begrenzt ſind, aber niht grösen. Wenn nah Om begrenzte räume grösen ſind, dan wären unbegrenzte räume keine grösen, aber ist niht grade das unbegrenzte das grose, das begrenzte das kleine? — Man fände alſo wol grund begrenzte räume kleinheiten zu nennen, niht aber grösen. Wenn Om ſagt, *wir nennen begrenzte Räume Gröſzen*, ſo hätte er ſagen ſollen, di matematiker nennen ſi ſo, ih nenne begrenzte räume räume, di begrenzt ſind.

In der stetigkeit der zeit erhält man den begrif des immerwärenden (beständig dauernden) und ist das immerwärende der zeit gottes der grund (di urſahe), das gottes zeit niht aufhört, gottes zeit keine beshränkte ist wi das niht immerwärende unſrer zeit der grund (di urſahe) ist, das unſre zeit eine beshränkte ist, aber ist niht zu begreifen, wi Om darauf komt, im immerwärenden der zeit (*der Stetigkeit der Zeit*) den grund (*die Urſache*) dafon zu erhalten, *daſz wir dieſe Gröſzen als benannte Zahlen ausdrücken können.* Fragte man, was daraus entstet, das di zeit immer (stetig) da ist, ſo wäre das ebenſo wi wenn man fragte, was daraus entstet, das di dinge immer (beständig, stetig) länge, breite und höhe haben, worauf man antworten müste, das daraus nihts entstehen kan, wi daraus nihts entstehen kan, wenn eine jumfer immer (beständig) jumfer bleibt. Woraus nihts entstehen kan, das

kan auh niht der grund (di urſahe) fon etwas entstehendem ſein, und ist daher Om in einem unrihtigen begreifen, wenn er meint, das *die Stetigkeit der Zeit die Urſache iſt, daſz* u. ſ. w.

Kries ſagt in ſeinem *Lehrbuch der Mathematik*, *Jena* 1844, ſ. 1:

Eine Gröſze iſt alles, was wir uns als einen Inbegriff von Theilen denken können, oder was in die Zuſammenſetzung einer Gröſze als Theil eingehet.

Da nihts ist, wofon wir uns niht etwas als teil dafon denken können, ſo bedeutet das, was Kris ſagte am ende nur, *eine Gröſze iſt Alles.*

Eine Gröſze iſt alles, was in die Zuſammenſetzung einer Gröſze als Theil eingehet ist ebenſo wi $x = x + a$, alein es kan x (*Gröſze*) niht auf beiden ſeiten der gleihung (der bestimmung) erhalten werden, wenn man bestimmen wil, was x ist. Kris ferstet niht zu bestimmen, wi ſol er dan bestimmen, was man unter gröse zu ferstehen hat? —

In einer anmerkung ſagt er, *Es iſt ſchwer einen allgemeinen Begriff der Gröſze zu geben.* Das mus ih wol glauben, ih wil di gröse der matematiker begreifen, kan ſi aber niht begreifen.

Nerling ſagt in ſeinem *Lehrbuch der Arithmetik*, *Dorpat* 1857, ſ. 1:

Was aus gleichartigen Theilen zuſammengeſetzt iſt, nennt man eine Gröſze.

Man nennt es eine Gröſze. Nerling hätte überlegen ſollen, ob man auh reht es ſo nent, wenn man es ſo nent. Wenn man ſih als gelerter auf das, was andre ſagen berufen wil (auf di menge), um damit etwas zu begründen, ſo ist das ein shlimmes ding und stelt man ſih damit niht über di menge, ſondern nur ir gleih.

Ist es denn ſo shwer zu merken, was es für eine bewantnis damit hat, was man (di menge) reht nent, was di leute für reht halten und ſo nennen? Man (di menge) hat immer unreht, man (di menge) glaubt reht zu haben, glaubt das rehte zu erhalten, man (di menge) erhält es aber niht, weil man keinen begrif dafon hat, was reht ist.

Brandes ſagt in ſeinem *Lehrbuch der Arithmetik*, *Oldenburg* 1808:

Der Gegenſtand, mit welchem die Mathematik ſich beſchäftigt iſt die Gröſze.

Ein koh beshäftigt ſih mit kohen, ein matematiker (di Matematik) mit der matematik, aber niht mit der gröse. Brandes komt auf etwas, worauf man wirklih (logish) niht kommen kan.

Brandes ſagt weiter, *alle Dinge, welche ſich meſſen laſſen, ſind der mathematiſchen Betrachtung fähig, oder ſind mathematiſche Gröſzen.*

Brandes hätte ſagen ſollen, matematishe dinge, da widerum logish *Gröſzen* im shlus niht erhalten werden kan.

Der gegenstand, mit dem ſih di matematiker beshäftigen, ist di matematik. In der matematik hat man es mit zalen zu tun oder etwas, das ſih wi zalen ferhält. In der aritmetik (zäl-kunst) hat man zalen, in der geometri (feld-messung) linien, flähen, räume, di zalen fon andern linien, flähen, räumen betragen oder ſih wi zalen ferhalten, daher in zalen erhalten werden. Das wirklihe (das im äusern zu begreifende) ist nihts geometrishes, weil ſih das wirklihe niht wi zalen ferhält. Di ſeiten unſres leibes sheinen zwar gleih zu ſein, ſind aber ungleih, ſi ferhalten ſih nur annähernd wi 1 zu 1, wirklih

aber niht wi 1 zu 1, wi ſi ſih ferhalten müsten, wenn man ſi als etwas geometrishes anſehen wolte. Es ist alſo das geometrishe etwas blos gedahtes, etwas niht wirklihes (etwas niht im äusern zu begreifendes), und mus man ſo etwas begreifen, wenn man das geometrishe der dinge reht begreifen wil, das im äusern der dinge nirgends begriffen wirt, aber im grunde aller dinge begriffen werden mus und one das am ende di dinge auh niht im äusern begriffen werden, da das äusre one das inre niht oder nur beshränkt begriffen werden kan.

Das ferhältnis der matematiker.

Euklid ſagt, *Λογος εστι δυο μεγεθων ὁμογενων ἡ κατα πηλικοτητα προς αλληλα ποια σχεσις, ratio eſt duarum magnitudinum eiusdem generis, ſecundum quantiplicitatem, mutua quaedam habitudo*, ein ferhältnis ist eine gewisse bezihung zweier gleihartiger grösen in der menge.

Da Grunert ſagt (in ſeinem *Lehrbuch der Mathematik, Brandenburg* 1838), *alle Zahlen ſind Grössen*, ſo käme man fon gleihartigen grösen auf gleihartige zalen, auf di auh Hunäus, Nerling und andre kommen. Man begreift aber niht, was es heisen ſol, gleihartige zalen. Wenn nah Euklid $1 : \sqrt{16}$ oder $4^0 : 4$ ein ferhältnis ist und alſo 1, $\sqrt{16}$, 4^0, 4 gleihartige grösen und auh (da eine gröse eine zal ist) gleihartige zalen ſind, ſo weis man niht, worin man ungleihartige zalen begreifen ſol, di begriffen werden müsten, wenn man fon gleihartigen zalen sprehen wil. Dan ist aber auh niht zu begreifen, was es heisen ſol, gleihartige grösen, weil aus diſen gleihartige zalen erhalten wurden. Wären gleihartige grösen etwas zu begreifendes, ſo müsten auh gleihartige zalen etwas zu begreifendes ſein.

Sollen unter zwei gleihartigen grösen zwei zalen oder zwei flähen u. ſ. w. gemeint ſein, ſo hätte Euklid ſagen ſollen etwas gleihbenantes, niht aber zwei gleihartige grösen, worunter zwei zalen oder zwei flähen u. ſ. w. niht ferstanden werden können.

Sezt man in das, was Euklid ſagt, zwei zalen, ſo ferstet man doh niht, was es heisen ſol, zwei zalen haben eine gewisse haltung zueinander in der menge.

In $\frac{6}{3} = 2$ wirt eine zal durh di beiden andern gehalten (ferhalten), woher, wenn eine der drei zalen felt, di felende aus den andern erhalten werden kan. Hat man $\frac{6}{3} = x$, ſo ist $x = 2$, hat man $\frac{x}{3} = 2$, ſo ist $x = 6$, und hat man $\frac{6}{x} = 2$, ſo ist $x = 3$, und haben alſo zalen in einer gleihung eine haltung oder bezihung zueinander. Wi in $\frac{6}{3} = 2$, ſo haben auh in $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$ di zalen eine bezihung zueinander, da auh in diſen zalen eine fon den andern gehalten (ferhalten) wirt, und daher aus den andern erhalten werden kan. Hätte man aber $\frac{6}{3}$ und fon diſen beiden zalen nur eine bekante, $\frac{x}{3}$ oder $\frac{6}{x}$, ſo würde man aus der einen zal niht di andre erhalten können, weil, wenn zalen

in einer haltung oder bezihung begriffen werden ſollen, wenigstens drei zalen erhalten werden müssen.

Wi di glider unſres leibes, ſo halten auh di glider einer gleihung einander, und wi bei den glidern unſres leibes fon einer bezihung di rede ſein kan, welhe di glider zueinander haben, ſo kan auh bei den glidern einer gleihung fon einer bezihung di rede ſein, di ſi zueinander haben. Es ist aber offenbar, das wenn di zalen einer gleihung in einer bezihung oder einem ferhältnis stehen, das dan zalen, di niht eine gleihung ausmahen, keine bezihung zueinander haben können, und alſo irgend zwei zalen zueinander keine bezihung haben können, weil zu einer gleihung wenigstens drei zalen gehören, woraus ſih ergibt, das Euklid ſih in einem irtume befindet, wenn er meint, das irgend zwei zalen shon in einer bezihung zueinander stehen könten.

Euklid ſagt weiter, *αναλογια εστιν ἡ των λογων ὁμοιοτης*, *proportio eſt rationum ſimilitudo*, ein rihtiges ferhältnis ist di gleihheit fon ferhältnissen.

Da Euklid in einem ferhältnis, *λογος*, einen unrihtigen begrif erhält, ſo mus auh das unrihtig ſein, was er in einem rihtigen ferhältnis, in *αναλογια*, begreift. Dis ist denn auh shon daraus zu ſehen, das grihish *αναλογιζομαι* ih überrehne und *λογιζομαι* ih rehne heist, das überrehnen aber ein rehnen ist, woher alſo auh *αναλογια* und *λογος* im grunde dasſelbe bedeuten, wi es auh im deutshen auf eins herauskomt, ob man 1 hält ſih, ferhält ſih zu 3 oder hält ſih an 3 wi 2 zu (an) 6 ſagt, weil ferhalten und anhalten im grunde immer ein halten ſind. Hirnah wäre das, was Euklid ſagt ebenſo wi, eine überrehnung ist di gleihheit fon rehnungen (gr. heist *λογος* rehnung, ferhältnis), was niht zu begreifen ist, und hätte daher Euklid etwas niht zu begreifendes geſagt.

Wenn Euklid in $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$ zwei gleihe rehnungen (ferhältnisse) zu erhalten glaubt, ſo ist das niht ſo. In gleihen rehnungen (und ebenſo in gleihen ferhältnissen) rehnet (ferhält) man gleihes, aber niht ungleihes. In $\frac{6}{3}$ und $\frac{8}{4}$ rehnet (zält) man niht diſelben zalen, rehnet (zält) alſo niht dasſelbe, und ſind $\frac{6}{3} = 2$ und $\frac{8}{4} = 2$ alſo niht gleihe rehnungen, wol aber rehnungen, di etwas gleihes ergeben; es ſind niht gleihe diviſionen wi $\frac{6}{3} = 2$ und $\frac{6}{3} = 2$, ſondern diviſionen mit gleihen qozienten. Wenn rehnungen, di gleihes ergeben, gleihe rehnungen wären, dan wären $3 + 5 = 8$ und $2 \times 4 = 8$ gleihe rehnungen, was niht der fal ist. Euklid begrif alſo unrihtig, wenn er in $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$ gleihe rehnungen (ferhältnisse) begrif, da man darin nihts anderes als etwas zu dividirendes mit gleihen qozienten hat.

Euklid ſagt weiter: *αναλογια δε εν τρισιν ὁροις ελαχιστοις εστιν*, *proportio in tribus ad minimum terminis conſiſtit,* ein ferhältnis bestet zum wenigsten aus dreien.

Dis ist wider unrihtig, denn hat man in $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$ ein ferhältnis, gr. *αναλογια*, ſo bestet ein ferhältnis aus firen, niht aber aus dreien und ist das, was Euklid ſagt eben ſo unrihtig wi wenn man ſagte, eine diviſion bestet aus

zweien $\left(\frac{6}{3}\right)$, wärend ſi aus dreien bestet $\left(\frac{6}{3} = 2\right)$. Man findet in einem ferhältnis aus dreien das firte, in einer diviſion aus zweien das dritte, aber es bestet niht ein ferhältnis aus dreien, eine diviſon niht aus zweien.

Das fortlaufend unrihtige in Euklids bestimmungen ist eine folge ſeiner unrihtigen begriffe, di er überhaupt dafon hat, was er bestimmen wil, und ſind Euklid in ſeinen unrihtigen begriffen alle matematiker gefolgt, weil ſi, eingenommen fon ſeinem anſehen, es gar niht mal wagten etwas daran, was er geſagt hat, auszuſezen. Di wenigen, di niht reht wusten, was ſi aus ſeinen bestimmungen mahen ſolten, hilten es für gut, ſi zu umgehen oder gar niht irer zu erwänen, um niht alle gegen ſih zu haben und auh, weil ſi unfermögend waren, ſih besser als Euklid auszudrükken.

In unrihtigem begrif fon einem ferhältnis, das Euklid shon in $\frac{6}{3}$ stat erst in $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$ begrif, kam Euklid darauf in einem ferhältnis, $6:3 = 8:4$ das erste und dritte glid forder- stat abwexelnde glider zu nennen und ſind in diſem unrihtigen begrif îm alle matematiker gefolgt.

Ein ferhältnis ist eine rehnung, in der man eine zal ausrehnet, di ſo fil mal in einer andern als eine dritte in einer firten enthalten ist, aber auh eine rehnung, in der man eine zal ausrehnet, di ſo fil weniger oder mer gegen eine andre als eine dritte gegen eine firte beträgt.

Ein ferhältnis ist eine gleihung, in der auf der einen und andern ſeite etwas zu dividirendes oder zu ſubtrahirendes erhalten wirt.

Ein ferhältnis ist eine fergleihung fon etwas zu dividiren oder zu ſubtrahirendem. Da nur etwas in fergleih kommen kan, das etwas gleihes hat, ſo müste, wenn etwas zu dividirendes im ferhältnis erhalten wirt, etwas zu dividirendes mit gleihen qozienten erhalten werden, $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$, und, wenn etwas zu ſubtrahirendes im ferhältnis erhalten wirt, etwas zu ſubtrahirendes mit gleihen resten erhalten werden, $1 - 2 = 0 - 1$. Ein ferhältnis, in dem etwas zu ſubtrahirendes in fergleih komt, läst ſih ein ſubtrakzions-, und ein ferhältnis, in dem etwas zu dividirendes in fergleih komt, ein diviſions-ferhältnis nennen. Dem geſagten nah wäre $\frac{6}{3} = 2$ kein ferhältnis, denn obshon man darin eine fergleihung oder gleihung begreift, ſo ist es doh niht eine fergleihung, in der etwas zu dividiren oder zu ſubtrahirendes, ſondern etwas zu dividirendes, $\frac{6}{3}$, und etwas niht zu dividirendes, 2, ferglihen wirt.

Brandes ſagt in ſeinem *Lehrbuch der Arithmetik* ſ. 137:

Das Wort Verhältniſz zeigt eine Vergleichung zwiſchen zwei gleichartigen Gröſzen an, und zwar eine Vergleichung, welche angiebt, ob ſie einander gleich ſind oder wie ſie von der Gleichheit abweichen.

Wenn man etwas fergleiht oder eine fergleihung zwishen etwas anstelt, ſo mus man etwas gleihes haben, da, wenn man das niht hätte, fon einer fergleihung niht di rede ſein kan, woher bei ungleihen zalen wi 5 und 3 (di nihts gleihes haben) fon einer fergleihung niht di rede ſein kan. Bei einer fergleihung wirt das gleihe fon etwas angegeben, aber niht, *ob ſie einander*

gleich ſind oder wie ſie von der Gleichheit abweichen, wi man dis bemerkt, wenn geſagt wirt, der eine ist ſo gros wi der andre, $\frac{6}{3}$ ist ebenſo fil wi $\frac{8}{4}$ oder wi 2, und hat daher Brandes einen unrihtigen begrif dafon, was man unter einer fergleihung zu ferstehen hat, und könnte er alſo auh nur, wenn ein ferhältnis eine fergleihung ist, einen unrihtigen begrif fon einem ferhältnis haben, und ſit man das denn auh, wenn Brandes 5 — 3 ein ferhältnis nent. Das unrihtige in dem, was Brandes ſagt, zeigt ſih auh darin, das er ſagt, *ob ſie einander gleich ſind oder wie ſie* u. ſ. w. Wenn zwei ſäze mit oder im zuſammenhang stehen, ſo müssen ſi gleih anfangen, woher Brandes hätte ſagen ſollen, ob ſi gleih oder (ob ſi) ungleih ſind. Es genügt dis, um zu zeigen, das Brandes nur unrihtig das, was ein ferhältnis ist, begriffen hat, und wil ih daher nur noh bemerken, das Brandes 5 — 3 ein aritmetishes, 5 : 20 ein geometrishes ferhältnis nent, alſo in 5 : 2 ein niht aritmetishes ferhältnis zu begreifen glaubt, obshon doh leiht zu bemerken ist, das 5 : 20 ebenſo wi 5 — 3 ein aritmetishes ferhältnis ist. Meint Brandes, das man etwas wi man grade wil benennen kan, ſo ist das ganz gut, doh nur ſo, das einem im nemen nihts unrihtiges gezeigt werden kan.

Nerling ſagt in ſeinem *Lehrbuch der Arithmetik, Dorpat* 1857, ſ. 1:

Wenn das Dividiren ein Meſſen iſt, oder wenn man unterſucht, wie viel mal die eine Zahl gröſzer ſey als eine andere, ſo ſagt man, der Diviſor bildet mit dem Dividend ein Verhältniſz.

Das ist ebenſo wi, wenn das dividiren ein messen ist, ſo ſagt man, Nerling ist ein matematiker. So wi Nerling kan man ſih niht ausdrükken, wenn man ſih logish ausdrükken wil. Sagte man, wenn das dividiren ein messen ist, ſo ist das dividiren ein rehnen, da messen rehnen heist, ſo bekäme man im nahſaz etwas aus dem forderſaz zu begreifendes, aber was Nerling begreifen wil, das läst ſih wirklih niht begreifen. Wenn das dividiren ein messen ist, ſo kan es niht blos in einem fal, ſondern mus es in jedem ein messen ſein, und begreift daher Nerling unrihtig, wenn er meint, das man im dividiren niht immer den begrif eines messens (ausmessens) fon etwas bekomt.

Wenn man unterſuht (ſuht), wi fil mal eine zal gröser als eine andre ist, ſo findet man das, was man unterſuht (ſuht), ſagt aber niht, *der Dividend bildet mit dem Diviſor ein Verhältniſz*, und begreift alſo Nerling wider etwas, das niht begriffen werden mus, und daher niht logish ist. Ih glaube kaum, das Nerlings unfähigster shüler im rehnen, ſo begreifen würde wi unſer Nerling und mus man staunen, zu welhem logishen denken es ein matematiker durh ſeine matematik gebraht hat.

Nerling ſagt weiter, *Die Zahl, welche anzeigt, wie viel mal die eine gröſzer als die andere iſt, heiſzt Quotient des Verhältniſſes.* a : b = m.

Wenn Nerling auf einen qozienten des ferhältnisses komt und a : b = m erhält, ſo gehört niht nur a : b, ſondern auh m zum ferhältnis, und bekäme man in demſelben a, b, m, alſo dreierlei, und müste ein ferhältnis niht mit a : b ſondern a : b = m bezeihnet werden. Es ist eitel, wenn Nerling a : b = c (c qozient der diviſion) und a : b = m (m qozient des ferhältnisses) untershei-

den wil, denn hat man a : b = c, ſo kan niht a : b = m ſein, weil in etwas gleihem a : b und a : b nur etwas gleihes begriffen werden kan.

Unterhaltung mit einem matematiker in Riga über das, was ein ferhältnis ist.

Ih zeigte einem matematiker di Brandesshe definizion eines ferhältnisses und fragte in, ob er ſi ferstände. Das wäre shon zu ferstehen, meinte er, und um mir das, was Brandes ſagt, deutlih zu mahen, stelte er ſih an eine türe und ſagte, er und di tür ständen in einem ferhältnis. Er begrif niht, das, wenn A und B in einem ferhältnis stehen, man zu ſagen hat, in welhem, und das, wenn dan geſagt wirt, in dem A : B = G : H, das ferhältnis fon A und B in A : B = G : H begriffen wirt, in dem auh G und H stehen, woher A und B, G und H ein und dasſelbe ferhältnis haben. Wenn man den matematiker und di türe mit zwei fershidnen dingen fergleiht, ſo begreift man ſi in einem ferhältnis, niht aber, wenn man ſi ſo begreift wi der matematiker.

Das denken der matematiker und andrer.

Ih shäze zwar di matematiker ſer hoh wegen irer shönen rehnungen, in denen ſi wirklih etwas leisten, was niht jeder kan, alein, um inen ganz gereht zu werden, mus ih doh ſagen, das ire bestimmungen (definizionen) nihts wert ſind. In iren blosen zalenrehnungen denken ſi rihtig, ſonst aber niht und ist daher al ir denken am ende nur ein beshränkt rihtiges denken, das im grunde kein denken genant werden kan, und würde man ſi daher auh nur in beshränktem ſin denker nennen können.

Das man one matematiker zu ſein, es zu einem rihtigern denken bringen kan als das der angeſehensten matematiker, kan man an Sokrates und Laplace ſehen. Forausgeſezt, das man einem denker in dem, was er ſagt, nihts unrihtiges nahweiſen kan, ſo ist zu bemerken, das es leiht ist Laplace, aber niht leiht ist Sokrates etwas unrihtiges im denken nahzuweiſen. Laplace rehnet Arhimedes, Apollonius fon Perga, aber niht Sokrates zu den grösten geistern des altertumes, und doh überragt diſer jene weit, und ist er und niht jene wirklih gros im denken zu nennen.

Es ist ein irtum, wenn man glaubt, das man ſih, um rihtig zu denken, mit der matematik beshäftigen mus. Es ist dis gar niht nötig und gehört etwas andres dazu als eine ſolhe beshäftigung, um es wirklih zu einem rihtigen denken zu bringen.

Euklid und ſeine beter.

Ih hatte bis noh for kurzem niht geglaubt, das di matematiker beter ſind, alein ſi ſind es, wenn ſi auh tauſend mal ſagen, das ſi niht beten, nur beten ſi ſo, das es niht fon allen geſehen wirt. Ih hätte gar nihts dagegen, wenn ir gebet nur ein rehtes gebet, und niht ein ſo unerhörtes nahbeten wäre, woſon man gewönlih nihts zu hören bekomt. Si beten nun shon über zwei

jartausende immerfort, one unterlas, um keine unterlassungsſünde zu begehen, bewundernswert, ſer zu bewundern, alles das nah, was Euklid inen forgebetet hat dafon, was eine gröse, ein punkt, eine figur, ein ferhältnis ist, und können und wollen niht dafon lassen.

Das nur äuserst wenige niht beten (niht alles nahsprehen, was andre ſagen), ist leiht zu bemerken, und glaubte ih früher, das di matematiker niht beter wären, alein ih habe mih geirt, ſi ferstehen fortreflih zu beten.

Folge des betens.

Folge des betens ist, das man das allereinfahste unrihtig begreift, da man auh, um dis zu begreifen, denken mus, denken aber zum beten unnötig ist, glauben mus man, um zu beten. Di matematiker glauben, das ist war. Brandes und Legendre glauben, das eine begrenzte flähe eine figur ist; Om glaubt, das eine begrenzte flähe eine gröse ist, wonah man glauben mus, das eine figur eine gröse oder eine gröse eine figur ist; Nauman glaubt, das eine n ſeitige flähe eine n ſeitige figur ist u. ſ. w. Di matematiker stehen alſo gewis mit unreht im ferdaht, das ſi niht glauben und beten.

Ih wundre mih jezt niht mer, wi es kam, das nimand meine abhandlung über das zwillingsgeſez am stein, ferstand, obshon ſi doh ſo leiht zu ferstehen ist, das ih dahte, ein jeder müste ſi ferstehen. Es kam daher, das di matematiker beter, aber niht denker ſind.

Ih hatte gewünsht, das man di zwillinge des kupferkiſes und der blende fon neuem unterſuht, um zu ſehen, ob ſih das an diſen zwillingen ſehen läst, was, wi ih denke, an inen zu ſehen ſein mus, und ih in meiner abhandlung über di zwillinge angegeben habe. Man tat aber gar nihts dafür, ja, ih erfur niht mal, obshon ih mih an W. Haidinger und nah England gewant hatte, wo gewisse kupferkis-zwillinge, di mih zunähst angingen und fon W. Haidinger beshriben worden ſind, aufbewart ligen.

Als ih wider über di zwillinge nahdahte, kam ih one das ih dafon eine anung hatte und wi fon ſelbst zu neuen beweiſen für meine anſiht der kupferkis- und blende-zwillinge, di mih durh ire einfahheit und shönheit überrashten, dabei sheinen ſi ſo nahe zu ligen, das ih mih wundre, wi ih niht shon längst, ſondern erst jezt nah ſo langer zeit auf ſi gekommen bin, und mus ih, um es zu begreifen, annemen, das ſi wirklih niht nahe ligen und es daher ſo lange gedauert hat bis ih auf ſi gekommen bin. So sheinen auh höhen im hohgebirge nahe zu ligen, di doh niht nahe ligen, wi es der weis, der auf ſi gekommen ist und den weiten, müſamen weg zu inen gemaht hat.

Nur in meinen leſern, fon denen ih dahte, das ſi doh etwas leiht zu ferstehendes leiht ferstehen würden, irte ih mih, doh niht darin, was ih über di zwillinge des kupferkiſes und der blende geſagt habe.

Es ist eine shöne entdekkung, das di P und P′ flähen an gewissen kupferkis-zwillingen blos in eine ebne zu fallen sheinen, wirklih aber niht in eine ebne fallen können, ſondern ſih unter einem winkel fon $178^0\,24'$

shneiden müssen. Es wirt dis, wenn auh niht mit dem auge gesehen, ja, wenn auh niht durh eine messung gefunden, doh gesehen und gefunden.

Als ih mih über di kupferkis-zwillinge äuserte und das unrihtige der Haidingershen angaben nahwis, traten alle auf W. Haidingers seite, nimand trat auf meine seite, und doh hat Haidinger unreht und habe ih reht.

Was di matematiker benante zalen nennen.

Di matematiker nennen 5 steine eine benante, 5 eine unbenante zal, wobei zu bemerken ist, das zalen, di man niht weiter nent, unbenante, dagegen zalen, di man benent, 1, 2, benante zalen sind wi dinge, di man niht weiter benent unbenante, dagegen dinge, di man benent, stein, gewäx, benante dinge sind. Also begreifen di matematiker unrihtig, si wissen niht, das 1, 2 benante zalen, 5 steine gezälte steine, in irer zal angegebne steine oder etwas gezältes sind. Daher kan denn auh Om nur einen unrihtigen begrif sih dafon mahen, was gröse ist (*eine benannte Zahl ist eine Gröſze*), er begreift in einem unrihtigen begrif fon etwas (gezältem) seine gröse.

Di matematiker untersheiden zalen und ziffern und nennen buhstaben zalen.

Brandes sagt in seiner *Arithmetik*, s. 21:

Ich habe mehrmals das Wort: Ziffer, gebraucht, wo man eigentlich Zahl sagen sollte, z. B. man kann die untenstehende Ziffer nicht von der obern abziehen. Da Ziffer eigentlich nur das Zahl-Zeichen bedeutet, so ist dieser Ausdruck allerdings nicht genau; er scheint mir aber verzeihlich, weil es uns an einem andern Worte fehlt, wodurch man andeuten könnte, daſz nur von einem einzelnen Theile der beyden Zahlen die Rede sey.

Man nent das zeihen eines kreuzes (†) ein kreuz, das eines buhstabens (a) einen buhstaben, das eines wortes (kreuz) ein wort, also das, was im grunde ein bloses zeihen fon etwas ist so wi das wirklihe, und ist dan auh das zeihen einer zal (125) eine zal zu nennen. Man komt niht oder nur unrihtig auf ziffer stat zal für 125, wenn man niht überhaupt ziffer stat zal sagt, und wäre also ziffer neben zal überflüssig und könte nur fon denen erhalten werden, di das unnötige erhalten wollen und dadurh niht das nötige (das logishe) erhalten.

Wenn Brandes wil, das eine ziffer ein zal-zeihen sein sol, so solte er niht sagen, *in der groſzen Zahl* (125) *kommen Ziffern vor, die kleiner sind als die darunter stehende oder zu derselben Ordnung gehörige Ziffer der kleinern Zahl* (39), sondern, in der grösern ziffer kommen ziffern for, di u. s. w.

Wi in einer shahtel shahteln, in einem fah fäher, so lassen sih auh in einer zal zalen (in einer menge mengen) begreifen, und begreift man in 125 drei zalen in einer zal.

Brandes sheint der name ziffer für zal ferzeilih, aber er ist niht zu ferzeihen, weil er niht rihtig ist. Um das zu sagen, wozu Brandes meint, das uns ein wort felte, dazu haben wir ein wort, und ferstet Brandes nur niht dis

wort (zal) reht zu gebrauhen, und zwar weil er dafon, was in den zalen zu begreifen ist, keinen rihtigen begrif hat.

Om ſagt in ſeinem *Lehrbuch — zwei Zahlen* a *und* b.

Om glaubt alſo, das a und b zalen ſind, alein a und b ſind buhstaben, 2 und 3 ſind zalen. Man kan zwar eine zal (eine menge) mit irgend einem zeihen bezeihnen, einem buhstaben, einem baum, aber dan ist eine zal doh kein buhstabe oder baum. Wolte Om ſih kurz ausdrükken, ſo ist das ganz gut, doh mus der ausdruk kurz und gut, aber niht kurz und shleht ſein, wi man dis Om forhalten, und dabei bemerken mus, das Om buhstaben und zalen niht zu untersheiden weis, er niht wüste, was zalen ſind, di er mit buhstaben ferwexelt, was man niht ſagen könte, wenn er nur hätte ſagen wollen, zwei mit a und b bezeihnete zalen.

Ih kan mir wol denken, das man meine bemerkungen kleinlih und blose wort-klaubereien nennen wirt, doh am ende nur, weil man ſih getroffen fült. Warum sprehen di matematiker dafon, das man ſih genau ausdrükken müste und tun es niht? Ferstehen ſi es niht? — Niht ſo, ſi ferstehen es, aber ſi wollen es niht.

Der ausdruk ist das mittel zur beurteilung, wi man denkt, und komt daher auf den ausdruk niht wenig, ſondern alles an.

Laplace über unſre gewönlihen zalen.

Laplace ſagt nah Grunert (*Mathematik*, ſ. 8):

Der Gedanke, alle Quantitäten durch neun Zahlen auszudrücken, indem man ihnen zugleich einen absoluten und einen Stellen-Werth beilegt, ist so einfach, dass man eben desshalb nicht genug erkennt, welche Bewunderung er verdient.

Wenn Laplace meint, das wir blos mit neun zalen alle zalen bezeihnen, ſo ist das niht ſo, da wir dazu zen zalen gebrauhen. Beim rehnen 1 — 2 = 0 — 1 begreift man auh 0 als zal, weil ſih 0 zu 1 wi 1 zu 2 ferhält, und begreift alſo Laplace niht, das man beim zälen (rehnen) 0, 1 2 3 4 5 6 7 8 9, alſo zen zalen, hat.

Römer und Grihen kamen zu einer beshränkten bezeihnung der zalen, weil ſi einen beshränkten begrif fon den zalen hatten, niht begriffen, das keine zal (*nullus numerus*, nul) unter den zalen begriffen werden mus.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	40	50	100	1000
α'	β'	γ'	δ'	ε'	ς'	ζ	μ'	ϑ'	ι'	ια'	ιβ'	μ'	ν'	ϱ'	͵α
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XL	L	C	M.

Begreift man, das in den zalen zalen und niht-zalen erhalten werden, und erhält alſo 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 und dan 10, ſo ist di weitre bezeihnung der zalen leiht, und erhält man di namen für di rihtig bezeihneten zalen in der sprahe, woher di bezeihnung der zalen ganz leiht zu ſein sheint, aber doh niht ist, weil zu derſelben ein rihtiger begrif fon den zalen gehört.

Laplace begrif niht, das alle mengen (*Quantitäten*) mengen und keine mengen und niht alein mengen ſind, und daher für mengen und keine mengen zeihen erhalten werden müssen, um alle mengen zu bezeihnen. Laplace

begrif di zalen, da er ja in ſeinen rehnungen zalen gerehnet hat, doh aber nur einſeitig, wi man das aus ſeiner äusrung über di zalen ſit; auh di Römer und Grihen begriffen di zalen, da ſi ja zalen haben, doh aber nur beshränkt, wi man das aus irer zalen-bezeihnung ſehen kan.

Da ſih eine kleinre zu einer grösern zal oder eine kleine zu einer grosen zal wi keine zal zu einer zal ferhält, $1 - 2 = 0 - 1$, ſo läst ſih eine kleine zal keine zal nennen und wirt auh eine kleine zal keine zal genant.

Das der erfinder unſrer zalen di zalen rihtig begrif, ſit man auh aus der art wi keine zal (nul) bezeihnet wirt. Keine zal (keins, nul) ist etwas niht zu begreifendes und müste man alſo keine zal mit einem zeihen bezeihnen, in dem man etwas niht zu begreifendes erhält. Ist aber niht eine ſeite one ende, ein kreis, etwas unendlihes, alſo etwas niht zu begreifendes? Ebenſo wi keine zal ferhält ſih auh eine unendlihe zal, und müste man daher diſe mit zwei kreiſen bezeihnen, wi es auh geshit, ∞. Dan ist aber auffallend, das di zal 8 mit zwei kreiſen bezeihnet wirt, eine endlihe zal wi eine unendlihe und mus man annemen, das der erfinder unſrer zalen 8 anders bezeihnet hat als es jezt geshit. Ih fand denn auh, in Schönemann's Diplomatik, Leipzig 1818, das 8 niht immer wi jezt, ſondern früher mit 8, fir mit ^, bezeihnet worden ist, und daraus mit der zeit 8 und 4 entstanden sind.

Unſre bezeihnung der zalen ist leihter, einfaher und shöner als di der Römer und Grihen, ſi ist rihtig, di der Römer und Grihen unrihtig, und ist zu bemerken, da di einfahe, shöne, leihte bezeihnung der zalen folge eines rihtigen begrifs fon den zalen ist, das im rihtigen das einfahe, shöne, leihte, im niht-rihtigen das niht-einfahe, niht-shöne, niht-leihte begriffen wirt.

Wi shwerfällig di Römishen und Grihishen zalen ſind, bemerkt man, wenn man grose zalen shreiben wil und wi wenig ſi ſih dazu eignen, mit inen etwas gerehnetes aufzushreiben, bemerkt man ſogleih, wärend dagegen di Arabishen zalen ſih in irer ganzen shönheit und einfahheit zeigen, wenn man grose zalen shreiben, oder beim rehnen zalen aufzeihnen wil.

Was ein matematiker ſagt, das eine nul ist.

Om ſagt in ſeinem *Lehrbuch* ſ. 9:

— daſz $0 + a = a$, und $a - 0 = a$ iſt, konnte bei materiellen Anſichten vom Addiren und Subtrahiren zu dem Wahne verleiten, daſz die Null nichts ſey. — Die Null iſt aber wohl etwas. Wäre die Null nichts, oder wären die Ausdrücke $+ a$ oder $- a$, Gröſzen, ſo könnte man nicht damit rechnen, weil man, der Definition des Rechnens zur Folge (§. 2), *nie mit Gröſzen rechnen kann.* (ſihe ſ. 34.)

Wi man aus $1 - 2 = 0 - 1$ ſit, ferhält ſih keine zal (nul) wi eine zal, $1 - 2 = - 1$, $0 - 1 = - 1$, und wirt alſo beim zälen 1 fon 0, eine zal fon keiner zal, eins fon keins, ebenſo gezält wi eine zal fon einer zal, und mus keine zal als eine zal angeſehen werden, wenn anders ſih nur zalen fon zalen zälen lassen. Wenn Om ſagt, *die Null iſt auch etwas,* ſo hätte er ſagen ſollen, was. Om ist wol etwas, was? — ein matematiker, ein denker. So müste auh

gefagt werden, wenn eine nul etwas ist, was fi ist. Aus Oms ausdruk fit man, das er niht reht weis, was eine nul ist oder niht besser am ende als jene, denen er rohe (*materielle*) anfihten forhält.

Das eine nul eine zal ist, fagt übrigens auh Brandes, denn wenn Brandes fagt, *ift die Ziffer, von der man borgen will, eine Null*, fo begreift er in nul wi in eins, zwei eine ziffer (eine zal).

Om fagt in feinem *Lehrbuch* f. 8:

— *durch ein und dasfelbe Zeichen* 0, *welches Null ausgefprochen wird.*

Wenn Om fagt, das *Zeichen* 0 *wird Null ausgefprochen*, fo ist das ebenfo wi wenn er fagte, das wirt ein baum ausgesprohen anstat, das wirt ein baum, ein zeihen genant. Es mus Om fo ergehen wi im märhen einem shönen mädhen, aus deren munde beim sprehen rofen kamen, di alfo rofen aussprah, wärend wir andern menshen-kinder folhe wunder niht herforbringen, fondern nur einfah worte ausspreħen, wenn wir etwas aussprehen, **doh Om spriht zeihen, wol auh rofen und andre shöne fahen aus, di wir blos nennen können. — Ih hatte bisher immer geglaubt, das di matematiker an gar keine wunder glauben (wenn fi auh alles möglihe wunderlihe dafür glauben), alein nun fehe ih, das ih mih denn doh wol fer irte, denn follen jezt niht di matematiker an wunder glauben, da einer unter inen wunder tut? — Etwas anders als blos worte ausspriht, was niht jeder kan? —**

Es war das nur wider etwas, um zu zeigen, wi (kläglih) fih di matematiker ausdrükken. Ja, wenn man es nur ferstet. Di fo sprehen, folten doh liber fo fernümftig fein, es fein zu lassen fo albern zu sprehen, **man ferstet niht, was niht logish zu ferstehen ist.** Ih habe bisher niht bemerkt, das andre gelerte fih fo unrihtig ausdrükken wi grade unfre matematiker, obshon di matematiker doh immerfort mit ausdrükken (formen $a+b$, $a-b$ u. f. w.) zu tun haben, und fit man aus allem, das fi nur einfeitig fon dem etwas fersten, wofon fi alle etwas zu ferstehen glauben.

Ein feiten-stük zum eben erwänten ausdruk Oms, das *Zeichen* 0 *wird eine Null ausgefprochen* (niht genant) bemerke ih in Nerlings *Lehrbuch* gleih auf der dritten zeile f. 1, *Jede Gröfze, für fich betrachtet, ift eine Einheit feiner Art* (niht irer art). Ein einziges deutsh und hat man daher fer reht, wenn man meint, di besten deutshen sprah-lerer würden matematiker fein. Dis bekam ih zufällig, wenn ih mih reht erinre in den Rigaschen Stadtblättern zu lefen, und würde ih di matematiker auh dazu emfelen, for allem aber zu professoren der logik, **um fo mer als di stellen für dife professoren auf den univerfitäten niht befezt zu fein sheinen. —**

Alles, was länge, breite und höhe hat, ist etwas; was niht länge, breite und höhe hat, ist nihts. Daher ferhält fih etwas zu nihts wi der tag zur naht, denn am tage ist etwas, in der naht nihts. Das nihts in der naht ist auh etwas, es ist niht-tag, es ist naht. Durh di sprahe wirt darauf hingedeutet, das di begriffe fon niht, naht zueinander gehören, in fergleih kommen müssen. Das etwas ferhält fih zum nihts wi das wirklihe zum niht wirklihen, wi das wirklihe zu einem blosen bilde oder zeihen des wirklihen, denn ein bloses bild oder zeihen fon etwas ist fo gut wi nihts, ist niht das wirklihe. Ein bild oder ein zeihen fon der ganzen welt und wenn es auh unendlih ist, wäre doh

nur immer ein bloses zeihen der ganzen welt und alſo am ende nihts. **Das al, fon dem wir etwas oder einen teil ſehen, ist etwas unendlihes, doh, da es nur ein bild oder ein bloses zeihen des wirklihen ist, nihts wirklihes, nihts weiter am ende als nihts, als ein bloses zeihen, ein zeihen gottes** (*σημειον του θεου*).

Wi ein matematiker ſagt, was addiren heist.

Hunäus ſagt in ſeinem *Lehrbuch der Arithmetik, Leipzig und Darmstadt* 1835. ſ. 20:

Zwei oder mehrere gleichartige Zahlen addiren, heiſzt, ſie in eine einzige Zahl vereinigen, in welcher eben ſo viele Einheiten und Theile der Einheit enthalten ſind, wie in den gegebenen Zahlen zuſammen.

Man begeift niht, was es heisen ſol, *gleichartige Zahlen.* Meint Hunäus, das zalen und buhstaben fershidne arten zalen ſind, ſo ist zu bemerken, das zalen ebenſo wenig buhstaben als buhstaben zalen ſind, und hätte Hunäus dan einen niht rihtigen begrif fon buhstaben und zalen.

Da Hunäus ſagt, *Zwei oder mehrere gleichartige Zahlen addiren heiſzt,* ſo hätte er auh ſagen ſollen, was es heist, *zwei oder mehrere ungleichartige Zahlen addiren*, und ist, da er dis unterläst, ſeine bestimmung der addizion beshränkt.

Da man beim addiren, wenn auh mer als zwei zalen zu addiren ſind, doh nur immer zwei zalen zu addiren brauht, um alle zu addiren, ſo hat man in der bestimmung des addirens nur fon zwei zu addirenden zalen zu sprehen nötig, und müste alſo Hunäus, wenn er ſih rihtig ausdrükken wil, ſagen, zwei zalen addiren heist u. ſ. w.

Da Hunäus bei der bestimmung der ſubtrakzion nur zwei zu ſubtrahirende zalen erhält, ſo müste er auh bei der bestimmung der addizion nur zwei zu addirende zalen erhalten, weil ſih das addiren und ſubtrahiren wi zu- und abzälen ferhält, und alſo beim ſubtrahiren fon demſelben wi beim addiren di rede ſein mus, nur in einem entgegengeſezten ſin.

Hunäus hätte aus der bestimmung teile der einheit (gebrohne zalen) weglassen ſollen, wi bei der bestimmung der ſubtrakzion, und mus es geshehen, weil man erst auf das zälen der zalen und dan auf das der teile fon zalen kommen mus, um di addizion und ſubtrakzion begreiflih zu mahen.

Das, was Hunäus ſagt, ferhält ſih ſo wi *zwei oder mehrere Steine addiren heiſzt, ſie in einen einzigen Stein vereinigen, in welchem ebenſo viele Einheiten und Theile der Einheit enthalten ſind wie in den gegebenen Steinen zuſammen*, wobei niht begriffen wirt, wi man dazu komt zu ſagen, *Einheiten und Theile der Einheit,* da ſi niht forher in den steinen begriffen werden. Alein ſagte man auh dafür, in welhem ebenſo ſile steine erhalten werden wi in den einzelnen steinen, ſo wäre damit doh nur etwas niht nötig zu ſagendes geſagt, weil es shon im forhergehenden begriffen wirt. Hätte Hunäus geſagt, bekante zalen einheiten und teile fon einheiten addiren heist, di bekanten zalen der einheiten in einer zal und di teile der einheiten in teilen Einer einheit erhalten, ſo wäre das etwas zu ferstehendes, aber das, was Hunäus ſagt, läst ſih niht ferstehen.

Alles zälen ist ein rehnen, in dem man aus bekantem unbekantes auffindet (ausrehnet).

Das einfahste zälen bestet darin, das man 1 und 1 rehnet, auf 2 komt; dan zu 2 wider 1 rehnet, auf 3 komt u. f. w., ausrehnet, wi fil das einzelne in etwas zufammen ausmaht.

Eine zal (eine menge) einheiten (steine) zälen heist ausrehnen, wi fil di einheiten (di einzelnen steine) zufammen ausmahen. Di einheiten (di einzelnen steine), di man hat, find das bekante in der rehnung (zälung), di zal (di menge) der einheiten (der einzelnen steine) das unbekante, das man durhs rehnen (zälen) der einheiten (der einzelnen steine) auffindet.

Eine bekante zal einheiten (5) zu einer andern bekanten zal einheiten (3) zuzälen (addiren) heist zälen (ausrehnen) wi fil einheiten eine zal hat, wenn eine bekante zal einheiten zu einer andern bekanten zal einheiten hinzugerehnet (hinzugezält) wirt.

Om fagt in feiner *Mathematik* f. 5:

Sollen im gemeinen Rechnen die zwei Zahlen 647 *und* 928 *zu einander addirt werden, fo ift das Gefchäft des Verbindens fchon beendigt, fo wie man an diefe dritte Zahl denkt, die fo viele Einheiten haben foll, als beide gegebenen Zahlen zufammen. Schreibt man nun* 647 + 928, *fo hat man den Ausdruck, durch welchen diefe dritte Zahl völlig beftimmt ausgedrückt ift. Das Addiren ift nun auch für die äufzern Sinne beendigt. — Jetzt kann man den Ausdruck nur noch umformen und ihn in jede mögliche und gewünfchte Form bringen, unter andern auch auf die Form* 1575, *d. h. nach Potenzen von* 10 *geordnet.*

Om hätte fagen follen, *das Gefchäft des Addirens* anstat *des Verbindens*, weil forher nur fom addiren und niht fom ferbinden di rede ist. Es ist niht zu ferstehen, wi das zufammenzälen (das addiren) fertig (beendet) fein fol, wenn man nur an di zal denkt, di fo fil einheiten enthält als das zufammenzuzälende, da man erst zufammenzälen mus, um fagen zu können, das man mit dem zälen fertig ist. Mit **647 + 928** werden zwei zalen bezeihnet, di man zufammenzuzälen hat (noh zufammengezält werden müssen), noh niht zufammengezält find, ire zal (ire fumme) ist noh unbekant, $647 + 928 = x$. Hätte Om gefagt, mit 647 + 928 wirt etwas zufammenzuzälendes oder werden fummanden bezeihnet, fo wäre daran nihts auszufezen, aber es darf niht gefagt werden, das damit di zufammenzälung (di addizion) beendet ist oder begriffen wirt, weil hirzu mindestens dreierlei gehört, das in $647 + 928 = 1575$ erhalten wirt. Om bemerkt niht, das, wenn er eine addizion mit $a + b$ bezeihnen wil, di addizion unfolständig bezeihnet wirt, und dadurh zeigt, das er einen unfolständigen begrif fon der addizion (alfo auh einer rehnung) hat, da di folständige addizion durh $a + b = c$ bezeihnet werden mus.

Wenn Om fagt, *Sollen Zahlen addirt werden, fo ift das Gefchäft des Verbindens fchon beendigt* u. f. w., fo ist das ebenfo wi Sol Om ein rehner fein, *fo ift das Gefchäft des Verbindens* u. f. w., wobei zu bemerken wäre, das man zu fagen hat, Sol Om ein rehner fein, fo mus er ein rehner fein (Om mus ein rehner fein, wenn er ein rehner fein fol), und demnah auh fagen müste, follen zalen addirt werden, fo müssen fi addirt werden (zalen müssen addirt werden,

wenn ſi addirt werden ſollen). Man hat niht zu ſagen, was addiren heist, wenn man addiren ſol. Wenn man addiren ſol, ſo mus das, was addiren heist, als bekant forausgeſezt werden, da einem nur etwas anbefolen werden kan zu tun, wofon man weis, was es ist.

Es ist erstaunlih wi unlogish ſih Om ausdrükt. Wi kan aber wol jemand, der ſih niht im mindesten logish auszudrükken ferstet, ein groser rehner (ein denker) ſein? — Niht anders als in beshränktem ſin.

Auf ſ. 4 ſeines *Lehrbuchs* ſagt Om:

— das gemeine Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren mit Ziffern-Ausdrücken verdient dieſe Namen mit Recht gar nicht, weil ſie alle zuſammen bloſz ein Umformen der (im Gedanken) vorhandenen Ausdrücke ſind.

Wenn Om meint, zuſammenzälen, abzihen, meren, teilen ſind im grunde immer nur ein zälen oder nur fershidne arten des zälens, daher im grunde immer ein und dasſelbe und nur im äusern etwas fershidnes, ſo werden ſi mit demſelben reht fershidne namen erhalten, mit dem überhaupt etwas im äusern fershidnes fershiden benant wirt. Solange wir an uns und den dingen, mit denen wir da ſind, etwas äusres (unſern und iren leib) begreifen, uns wi alle dinge nur durhs äusre (den leib) begreifen, ſo werden wir für das, wenn auh im grunde gleihe, im äusern aber fershidne fershidne namen erhalten müssen, weil wir durh das fershidne in irem äusern alein zu fershidnen begriffen kommen. Daher begreift Om di ſahe niht reht, wenn er meint, das addiren, ſubtrahiren, multipliziren, dividiren niht ſo genant zu werden ferdint, es mus ſimmer ein ſolher untershid in den namen gemaht werden, um das im äusern fershidne (di fershidnen arten des zälens, das addiren, ſubtrahiren u. ſ. w.) fershiden zu begreifen. Wenn etwas niht ſo benant zu werden ferdint, wi es genant wirt, ſo mus es auh niht ſo genant werden, alſo müste man das addiren, ſubtrahiren u. ſ. w. niht ſo (niht addiren, ſubtrahiren) nennen, wi mus man es dan aber nennen? — *Ein Umformen der (im Gedanken) vorhandenen Ausdrücke!?*

Man hat in a + b, a — b bezeihnungen fershidner arten des zälens (rehnens); in addiren, ſubtrahiren namen (bezeihnungen) fershidner arten des zälens (rehnens); wenn man daher ſagen wolte, di bezeihnungen (namen) addiren, ſubtrahiren ferdinen niht behalten zu werden, ſo müste man auh ſagen, di bezeihnungen a + b, a — b ferdinen niht behalten zu werden, und wäre es alſo unlogish, wenn Om di bezeihnungen addiren, ſubtrahiren überflüssig, aber di a + b, a — b niht überflüssig fände.

Wenn man 3 und 5 zält, 8 findet, ſo hat man ausgedaht (ausgerehnet), wi fil 3 und 5 zuſammen ausmahen, hat aber niht einen in gedanken forhandnen ausdruk umgeformt (anders ausgedrükt), denn das, was man in gedanken hat, ferhält ſih wi ein zueinanderstellen oder ſezen fon etwas zu etwas (fon 3 zu 5), wodurh man etwas zuſammen erhält (3 und 5), aber niht wi ein umgestalten fon etwas in etwas (fon 3 in 5).

Ih wuste bisher niht (ih erfare es erst jezt durh Om), das man beim *gemeinen Addiren, Subtrahiren* u. ſ. w. *Ziffern-Ausdrücke* gebrauht, ih glaubte, das man dabei zalen zält (ausrehnet).

Wi ein matematiker ſagt, was ſubtrahiren heist.

Hunäus ſagt in ſeinem *Lehrbuch* ſ. 21:

Von einer Zahl, a, eine andere gleichartige, b, ſubtrahiren, heiſzt: a als die Summe zweier Zahlen, b als den einen Summanden jener Summe anſehn, um die Gröſze des andern Summanden, c, zu finden. — Die gegebene Summe, a, heiſzt hier, Minuend, der gegebene Summand b, Subtrahend und der aufzuſuchende, c, Differenz, Rest, Unterſchied.

Man kan zwar in einer mit a bezeihneten ſumme eine mit b bezeihnete ſumme, niht aber wi Hunäus in einer ſumme ſummanden begreifen, denn in einer ſumme (etwas zuſammengezältem) werden ſummen (wirt etwas zuſammengezältes), in einem ſummand (etwas zuſammenzuzälendem) werden ſummanden (wirt etwas zuſammenzuzälendes), in einer zal werden zalen und wirt nihts anders erhalten, und ist daher Hunäus in einem unrihtigen begreifen begriffen.

Das unrihtige in Hunäusses begrif läst ſih auh in andrer art nahweiſen.

Wenn Hunäus ſagt, *a als die Summe — b als den Summanden — anſehn, um den andern Summanden c zu finden*, ſo ist das ebenſo wi einen als rehner anſehen, um an îm etwas anders zu finden, wobei zu bemerken wäre, das, wenn man einen als rehner anſit, man weis als was er angeſehen werden mus, weis, was er ist. Zwar läst ſih, wenn man einen als rehner anſit, ein grund dazu angeben, weil man einen grund haben mus, um einen als rehner anzuſehen (für einen rehner zu halten), aber niht eine abſiht, weil man eine abſiht dabei niht fassen kan.

Wenn man 5 fon 8 abzit, 3 findet und es mit $8 - 5 = 3$ bezeihnet, ſo ist es rihtig, wenn man nah der bezeihnung ſagte, das 8 di ſumme fon 5 und 3 wäre, alein, wenn man ſagen wolte, abzihen heist aus einer bekanten ſumme (8) und einem bekanten ſummanden jener ſumme (5) den unbekanten ſummanden jener ſumme (3) finden, ſo fergäse man, das man nah der bezeihnung fon etwas das wirklihe bestimmen wil, was niht anget one dabei zu einem beshränkten begrif des wirklihen zu kommen.

Das unrihtige in Hunäusses begriffen zeigt ſih auh darin, das er bei der ſubtrakzion dreierlei (*Minuend, Subtrahend, Reſt*), bei der addizion aber blos zweierlei (*Summanden, Summe*) erhält. *Summanden, Summe* ſind im äusern zweierlei und niht dreierlei fershidnes wi *Minuend, Subtrahend, Reſt.* Da ſih das ſubtrahiren wi das addiren ferhält, ſo mus logish, wenn bei dem einen, ſo auh beim andern dreierlei im namen fershidnes erhalten werden, wi dis auh der fal ist, wenn man eine addizion mit $a + b = c$, eine ſubtrakzion mit $c - b = a$ bezeihnet.

Eine bekante zal einheiten fon einer andern bekanten zal einheiten abzälen (abzihen, ſubtrahiren) heist zälen (auszälen, ausrehnen), wi fil einheiten nahbleiben, wenn eine bekante zal einheiten fon einer andern bekanten zal einheiten abgezält (abgerehnet) wirt.

Wi ein matematiker ſagt, was multipliziren heist.

Hunäus ſagt in ſeinem *Lehrbuch der Arithmetik* ſ. 25:

Eine Zahl a mit einer andern b multipliciren, heiſzt: durch dieſelben Operationen aus a eine dritte Zahl entſpringen laſſen, durch welche b aus der Einheit entſtanden war.

Wenn daher mit andern worten, eine mit **a** bezeihnete zal mit einer andern mit **b** bezeihneten multipliziren heist, ebenſo (***durch dieſelben Operationen***) fon der mit **a** bezeihneten zal zu einer zal kommen (***eine dritte Zahl entſpringen laſſen***) wi man fon **1** (***der Einheit***) zu der mit **b** bezeihneten gekommen ist, ſo wäre es im grunde ebenſo wi wenn man ſagte, **3 2** mal multipliziren, heist, angeben, das **3** ſih zu einer zal ebenſo ferhält wi di einheit oder **1** zu **2**, $\frac{3}{a} : x = 1 : \frac{2}{b}$, und hätte ſih alſo Hunäus in ein ferhältnis fertift, fon dem man niht ferstet, wi er dazu kam, wenn er etwas fom multipliziren ſagen wolte.

Es ist erstaunlih, wi (wenig) Hunäus denkt, und das begreift, was er ſagt. Er ſagt, eine ***dritte Zahl entſpringen laſſen*** und ſit niht ein, das er hätte ſagen ſollen, eine firte zal, denn di mit a bezeihnete zal ist eine zal, di mit b bezeihnete di zweite, di einheit (eins) di dritte, ſeine dritte alſo di firte zal **a, b, 1, x.** In einer merung (multiplikazion) werden drei zalen erhalten durh das zu merende, das merende (den merer) und das gemerte, in einem ferhältnis fir zalen und weis Hunäus das niht. **Wi shon geſagt wurde, di matematiker wissen niht reht, was ein ferhältnis ist und ſit man dis jezt wider.** Hunäus wil einen begrif fon dem geben, was multipliziren heist, und ſagt etwas, wobei man zu einem ferhältnis komt. Da das, was Hunäus ſagt, im grunde nihts anders heist als in einem ferhalten fon firen (**a, b, 1, x**) das firte (**x**) finden, ſo sprähe Hunäus fon einem ferhältnis und bestimte dis ſer shön ſo, ***durch dieſelben Operationen aus*** $\frac{a}{3}$ ***eine dritte Zahl*** (x) ***entſpringen laſſen, durch welche*** $\frac{b}{2}$ ***aus der Einheit entſtanden war*** (eine unbekante, mit **x** bezeihnete zal entspringt oder entstet aus der mit **a** bezeihneten zal **3** wi di mit **b** bezeihnete zal **2** aus der zal **1**, **x** ferhält ſih zu **a** wi **b** zu **1**, $x : a = b : 1$) anstat einfah zu ſagen, eine mit **a** bezeihnete zal ſofil mal nemen als di mit **b** bezeihnete einheiten hat (was, wenn **a** und **b** **3** und **2** ſind, **6** gibt, **3** mal **2** maht **6**), worin alle operazionen begriffen würden, di nötig wären, um ***aus a eine dritte Zahl ebenſo entſpringen zu laſſen wie b aus der Einheit entſtanden*** (Hunäus ſagt niht entsprungen) ***war.***

Sol man nun wol ſagen, das es ſahe eines matematikers ist, ſih einfah auszudrükken, niht ſilmer ſagen, das ein matematiker fon operazionen spriht, wo doh niht fon operazionen di rede ſein kan, wenn man darunter niht etwas kinderleiht zu mahendes, ſondern etwas ferstehen wil, was nur männer mahen können?

Wenn man 2 4 male mert, 8 findet und nah der bezeihnung $2 \times 4 = 8$ ſagte, 8 erhält man aus 2 wi 4 aus 1, ſo wäre es nah der bezeihnung rihtig,

aber wenn man ſagen wolte, 2 4 male meren heist 8 aus 2 ebenſo erhalten wi 4 aus 1, ſo fergäse man, das man nah der bezeihnung einer merung das, was eine merung ist, bestimmen wil, was niht get, wenn man niht einen blos nah der bezeihnung rihtigen, ſonst aber unrihtigen begrif, dafon, was eine merung ist, bekommen wil.

Eine bekante zal einheiten eine bekante anzal male meren (multipliziren) heist zälen (ausrehnen), wi fil einheiten man hat, wenn man eine bekante zal einheiten ſo fil male zält (rehnet) als eine andre bekante zal einheiten einheiten enthält.

Es ist alſo das meren ein zuzälen (addiren), und untersheidet ſih das meren fom zuzälen nur dadurh, das man beim zuzälen eine bekante zal einheiten und eine andre bekante zal einheiten zuſammen zält, beim meren aber eine bekante zal einheiten eine bestimte anzal male zält.

Da das meren als rehnen ein zälen ist, ſo läst ſih niht ſagen, eine zal mit einer andern multipliziren, weil das ebenſo wäre wi eine zal mit einer zal zälen oder etwas mit zalen rehnen (zälen, denken), man zält aber eine zal oder zalen niht mit einer zal oder zalen, ſondern mit dem ferstande.

Wi ein matematiker ſagt, was dividiren heist.

Hunäus ſagt in ſeinem *Lehrbuch der Arithmetik* ſ. 30:

Eine Zahl, a, durch eine andere, b, dividiren, heiſzt: jene als ein Product zweier Factoren b und c anſehen, um den zweiten, unbekannten Factor, c, zu finden.

Was Hunäus ſagt, ist ebenſo wi wenn man ſagte, einen matematiker als ein produkt zweier faktoren, weisheit und geist, anſehen, um den zweiten, unbekanten faktor, geist, zu finden, wobei zu bemerken wäre, wenn man einen matematiker als ein produkt zweier faktoren, weisheit und geist, anſit, man alles hat, was man am matematiker begreift, weisheit und geist, di den matematiker ausmahen (deren produkt der matematiker ist) wi wenn $a = b \times c$ ist, man in b und c alles hat, was a enthält. Sit man einen matematiker als ein produkt eines bekanten faktors, weisheit, und eines unbekanten an, ſo hätte man in einem matematiker einen bekanten faktor, weisheit, und einen unbekanten und widerum alles wi wenn $a = b \times x$ ist, in b und x alles erhalten wirt, was man in a begreift. Sit Hunäus eine mit a bezeihnete zal als das produkt zweier mit b und c bezeihneten zalen an, ſo hat er lauter bekante zalen, da mit den ersten buhstaben des alfabets bekante zalen bezeihnet werden, und begreift man dan niht, wi er, da alles bekant ist, zu etwas unbekantem komt, oder begreift es nur dadurh, das er niht reht zu ſagen weis, was er ſagen wil oder zu ſagen hat. Es get niht, wenn man b und c als etwas bekantes begreift, ſi anders als etwas bekantes zu begreifen, und kan daher Hunäus, wenn er c als bekant begreift, weiter niht c als etwas unbekantes begreifen, wenn er rihtig begreifen wil. Sol aber c etwas unbekantes ſein, ſo hätte Hunäus ſagen müssen, a als ein produkt zweier faktoren b und x anſehen, und wäre dan ſein nahſaz, ***um den zweiten, unbekannten Factor, c,***

zu finden, unnötig, weil es ſih ferstet, das, wenn $a = b . x$ das aufzufindende nur x ſein kan.

Wenn man Hunäus als matematiker anſit, ſo ſit man in ſo an, weil er zu ſagen weis, was eine zal mit einer andern dividiren heist, und dis nur ein matematiker zu ſagen ferstet; wenn man eine mit a bezeihnete zal als das produkt zweier andern, mit b und c bezeihneten zalen anſit, ſo ſit man ſi ſo an, weil man di mit a bezeihnete zal aus b und c erhält. Wenn man weiter eine mit a bezeihnete zal als das produkt einer bekanten und unbekanten, mit b und x bezeihneten, zal anſit, ſo ſit man ſi ſo an weil ſi als das produkt einer bekanten und unbekanten, mit b und x bezeihneten, zal erhalten wirt, $a = b . x$ ist. Wolte man dan weiter wissen, was di mit x bezeihnete zal für eine zal ist, ſo fände man $x = \frac{a}{b}$. Hunäus komt mit al dem, was er ſagt, doh niht dazu zu ſagen, was dividiren heist. **Hunäus weis alſo auh niht, was dividiren heist und war das zu erwarten, als man ſa, das er niht zu ſagen wuste, was zälen (addiren) heist.**

Wenn man 3 fon 6 dividirt (teilt), 2 findet und nah der bezeihnung $\frac{6}{3} = 2$ ſagte, 6 ist das produkt (das herforgebrahte) fon 2 und 3, ſo ist es rihtig, aber wenn man ſagte, dividiren heist aus einem produkt und einem produzenten (faktor) den andern produzenten (faktor) finden, ſo fergäse man, das man nah der bezeihnung einer diviſion das, was dividiren heist, bestimmen wil, wodurh man wol nah der bezeihnung, ſonst aber niht das rihtige bekäme.

Eine bekante zal einheiten fon einer andern bekanten zal einheiten teilen (dividiren) heist zälen (ausrehnen), wi fil male eine bekante zal einheiten fon einer andern bekanten zal einheiten geteilt (gezält) werden kan, oder wi fil male eine bekante zal einheiten in einer andern bekanten zal einheiten enthalten ist.

Es ist alſo das dividiren wi das addiren, ſubtrahiren, multipliziren ein zälen und untersheidet ſih das dividiren fom ſubtrahiren nur dadurh, das man beim ſubtrahiren eine bekante zal einheiten fon einer andern bekanten zal einheiten teilt (zält), beim dividiren aber fon einer bekanten zal einheiten eine andre bekante zal einheiten eine anzal male zält (teilt).

Da das dividiren als rehnen ein zälen ist, ſo läst ſih niht ſagen, eine zal mit einer andern zal dividiren, weil das ebenſo wäre wi eine zal mit einer zal zälen; man zält aber eine zal oder zalen niht mit einer zal oder zalen, ſondern mit dem ferstande.

Nah der bezeihnung $\frac{8}{4} = 2$ ist es zwar rihtig, 2 einen teil fon 8, dan 4 teiler (diviſor) zu nennen, da 2 ein teil fon 8 ist, und das, wodurh man einen teil erhält (di 4), teiler genant werden mus, alein wenn man daran denkt, das man beim dividiren ausrehnet, wi fil male (lat. *qotiens*, wi fil male, daher qozient) ſih eine bekante zal einheiten fon einer andern bekanten zal abzälen läst, ſo können di namen teil, teiler (diviſor) niht rihtig ſein, wi man dis auh daraus bemerkt, das, wenn man beim dividiren ausrehnet, wi fil mal eine zal in der andern enthalten ist, man niht einen teil ausgerehnet hat.

Es ist etwas anders, wenn man 8 in 4 teilt als wenn man 4 fon 8 teilt.

Wenn man 8 in 4 teilt, ſo hätte man auszurehnen, wi fil auf 1 komt, wenn 8 in 4 geteilt werden und erhilte eine ferhältnisrehnung, $1 : x = 4 : 8$. Man findet wi fil auf 1 komt, wenn man 8 1 mal zält, dafon 4 dividirt, $\frac{8 \times 1}{4}$, was ebenſo ist wi wenn man 4 fon 8 dividirt, $\frac{8}{4}$. In der diviſion hat dan 2 (di anzal male, di 4 fon 8 dividirt wirt) di bedeutung eines teiles, welhen, wenn 8 in 4 geteilt werden, 1 bekomt, aber wirklih (in der diviſion) ſind es nur di male, welhe eine bekante zal einheiten fon einer andern bekanten zal einheiten abgezält werden kan.

Wi ein matematiker ſagt, was eine bestimmung (definizion) ist.

In Grunerts *Lehrbuch der Mathematik, Brandenburg* 1838, ſ. 1 stet:

§ 1. *Erklärung. Alles, was einer Vermehrung und Verminderung fähig ist, wobei sich eine Vermehrung oder Verminderung als möglich denken lässt, heisst eine Grösse.*

Anmerkung. Eine Erklärung oder Definition ist ein mathematischer Satz, in welchem die Eigenschaften eines Dinges oder eines Begriffs angegeben werden.

Wenn Grunert ſagt, *Eigenschaften eines Dinges oder eines Begriffs*, ſo ſezt er ding und begrif einander gleih, alein ding und begrif ferhalten ſih niht gleih. Ein ding ist etwas, das für ſih begriffen werden kan, niht ſo ein begrif. Es läst ſih ſagen, der stein ist ein ding, aber kein mensh wirt ſagen, der stein ist ein begrif, und wenn jemand einen stein einen begrif nennen würde, ſo müste man în für irre halten (er ſagte begrif stat ding). Man kan wol ſagen, am stein erhält man einen begrif fon härte, fon gröse, aber niht der stein ist ein begrif, was ebenſo wäre, wi wenn man ſagte, der stein ist eine härte, eine gröse. Wenn Grunert glaubte, das er dadurh, das er zu *Eigenschaften eines Dinges* hinzuſezte oder *eines Begriffs*, das was er ſagte, bestimter zu ſagen, ſo irt er, weil man dadurh nur etwas begriffe, was matematiker und er zu begreifen glauben können, andre menshen-kinder aber niht begreifen. Hätte Grunert geſagt, di eigenshaften eines dinges oder fon etwas, ſo wäre damit etwas algemeines ſo herforgehoben wi es der sprahe angemessen geweſen wäre.

Wenn Grunert ſagt, *ein mathematischer Satz, in welchem die Eigenschaften eines Dinges oder eines Begriffs angegeben werden, ist eine Erklärung oder Definition*, ſo ist *ein mathematischer Satz, in welchem nicht die Eigenschaften eines Dinges oder eines Begriffs angegeben werden, keine Erklärung oder keine Definition.* Grunert hätte ein beispil fon der einen und andern art ſeiner matematishen ſäze anfüren ſollen, um ſeine matematishen ſäze zu begreifen. Indes mus ſein ſaz: *Alles, was einer Vermehrung und Verminderung fähig ist, heisst eine Grösse, ein mathematischer Satz sein, in welchem die Eigenschaften eines Dinges oder eines Begriffs angegeben werden*, da er diſen ſaz *eine Erklärung* nent, und käme es alſo darauf an, diſen matematishen ſaz

zu unterſuhen, um dadurh einen begrif fon den angefürten arten der matematishen ſäze zu erhalten.

Grunert ſagt, *Alles, was einer Vermehrung und Verminderung fähig ist, heisst eine Grösse*, alein er hätte ſagen ſollen, alles, was einer fermerung und fermindrung fähig ist, heist einer fermerung und fermindrung fähig; denn, was gros ist, heist gros oder wirt gros genant; alles, was stein ist, heist (wirt genant) stein, alſo, alles, was einer fermerung fähig ist, heist einer fermerung fähig. Mithin ist Grunert irre, wenn er *heisst eine Grösse* stat heist einer fermerung und fermindrung fähig, ſagt.

Wenn Grunert ſagt, *Alles, wobei sich eine Vermehrung und Verminderung als möglich denken lässt, heisst eine Grösse*, ſo heist alles, wobei ſih niht eine fermerung und fermindrung denken läst, niht eine gröse. Alein, was kan man ſih niht fermert und fermindert denken? — Da man ſih alles fermert und fermindert denken kan, ſo komt es darauf hinaus, das Grunert ſagt, *Alles heisst eine Grösse* und das ist alſo *ein mathematischer Satz, in welchem die Eigenschaften eines Dinges oder eines Begriffs angegeben werden, eine Erklärung oder eine Definition*, alein ih erhalte in diſem matematishen ſaz, *einen mathematischen Satz, in welchem nicht die Eigenschaften eines Dinges oder eines Begriffs angegeben werden, keine Erklärung oder keine Definition*. Sagte man, der mensh heist Grunert, ſo hätte man einen menshen benant, aber niht di eigenshaften desſelben angegeben, und ebenſo, wenn Grunert ſagt, alles heist eine gröse, ſo hätte er alles benant, aber niht eine eigenshaft fon allem angegeben. Wenn Grunert geſagt hätte, alles hat gröse oder ist gros, dan wäre fon îm eine eigenshaft fon allem angegeben, wi wenn man ſagte, Grunert ist gros, oder hat gröse, eine eigenshaft Grunerts angegeben wäre.

Grunert erhält dem forhergeſagten nah, *Alles ist eine Grösse*, aber wenn alles eine gröse ist (gröse heist), was ſol dan *Grössen* heisen? und begreift man niht, wenn Grunert ſagt, *Die Wissenschaft von den Grössen ist die Mathematik;* es ist niht besser als wenn man ſagte, *die Wissenschaft von Allem ist die Mathematik*, was ſo wol jeder ſagen könte.

Aus diſer unterſuhung der gedanken Grunerts ſit man, das er irre ist, und was man weiter fon allem übrigen, was er forträgt, zu halten hat, brauht niht unterſuht zu werden, da, wenn darin auh etwas rihtiges forkommen ſolte, wi dis der fal ist, dis rihtige doh am ende nur etwas beshränkt oder einſeitig rihtiges ſein kan. In beshränktem begrif wirt man rihtig finden, was Grunert forträgt (weil er etwas beshränkt rihtiges forträgt), in niht beshränktem begrif aber niht, und wenn Grunert fon allen für niht beshränkt gehalten wirt, ſo komt es nur daher, das alle in iren begriffen ſih wi Grunert ferhalten, beshränkt in den begriffen wi Grunert ſind.

Eine bestimmung ist eine gleihung niht in zalen. Da in einer gleihung in zalen und in einer niht in zalen etwas gleihes begriffen wirt (eine gleihung), ſo ferhält ſih eine gleihung niht in zalen wi eine gleihung in zalen und ist alſo, zwar niht im äusern di eine di andre (da di eine eine gleihung in zalen, di andre niht in zalen ist), wol aber im grunde (da im grunde di eine und andre eine gleihung ist). Bestimmung und zalen-gleihung ferhalten ſih alſo wi di beiden ſeiten des ferhältnisses $8:4 = 6:3$, in dem zwar niht di ſeiten

etwas im äusern, wol aber im grunde gleihes ſind ($\frac{8}{4}$ und $\frac{6}{3}$ ſind in den blosen zalen etwas fershidnes, im grunde aber gleihes, da $\frac{8}{4}$ und $\frac{6}{3} = 2$ ist).

Da eine gleihung ($5 + 3 = 8$) aus zwei ſeiten ($5 + 3$ und 8) bestet, fon denen ſih di eine zur andern wi das zu bestimmende zum bestimten ferhält, ſo mus auh eine bestimmung aus zwei ſeiten bestehen, fon denen di eine zur andern ſih wi das zu bestimmende zum bestimten ferhält.

Da zu den feiten einer gleihung gleihes zugelegt werden kan ($5 + 3 = 8$, $5 + 3 + 1 = 8 + 1$) ſo kan auh zu den ſeiten einer bestimmung gleihes zugelegt werden.

Da in einer gleihung, wenn di eine ſeite etwas endlihes ist, auh di andre etwas endlihes ſein mus, niht di eine etwas endlihes, di andre etwas unendlihes ſein kan, ſo mus auh in einer bestimmung, wenn di eine ſeite etwas endlihes ist, di andre etwas endlihes ſein, und kan niht di eine etwas endlihes, di andre etwas unendlihes ſein.

Da ſih in einer gleihung di ſeiten umkeren lassen ($5 + 3 = 8$, $8 = 5 + 3$) one das dadurh etwas geändert wirt, ſo müssen ſih auh di ſeiten einer bestimmung umkeren lassen, one das dadurh etwas geändert wirt.

Da in einer gleihung di ſeiten aus einer gleihen, aber auh ungleihen zal glider bestehen können, ſo können auh di ſeiten einer bestimmung aus einer gleihen, aber auh ungleihen zal glider bestehen.

Da di ſeiten einer gleihung im äusern fershiden ſind ($5 + 3 = 8$), ſo müssen auh di beiden ſeiten einer bestimmung im äusern fershiden ſein.

Da in einer gleihung di eine ſeite gegen di andre in mer als blos einem äusern gleih erhalten werden kan ($4 = 2 \times 2$, aber auh $4 = 1 \times 4$), ſo kan auh in einer bestimmung di eine ſeite gegen di andre in mer als blos einem äusern gleih erhalten werden.

Eine rihtige bestimmung wirt man daran erkennen, das alles, wi auf der einen, ſo auf der andern ſeite, nur in einem fershidnen äusern oder in einer andern gestalt (form) begriffen werden kan.

Wirt fon einem dinge oder etwas eine eigenshaft angegeben, ſo wirt di eigenshaft eines dinges oder fon etwas angegeben, es wirt aber niht das ding oder etwas unter einer andern gestalt oder in einem andern äusern wider erhalten wi dis der fal ist, wenn geſagt oder bestimt wirt, was ein ding oder etwas ist. Wirt geſagt, ein dreiek hat drei ſeiten oder ist dreiſeitig, ſo ist eine eigenshaft des dreieks (durh di drei ſeiten, das dreiſeitige desſelben) angegeben, aber es ist niht geſagt (bestimt), was das dreiek ist, wi dis geshit, wenn geſagt wirt, das dreiek ist eine dreiſeitige flähe, und erhält man hirdurh niht eine eigenshaft des dreieks, ſondern das dreiek wider, nur unter einem andern äusern (als dreiſeitige flähe). Wirt geſagt, di zal 8 ist teilbar, ſo wirt eine eigenshaft der zal 8 erhalten, aber es ist niht teilbar unter einer andern gestalt das, was di zal 8 ist; wirt dagegen geſagt, di zal 8 ist 2 mal 4 ($8 = 2 \times 4$), ſo erhält man in 2×4 di 8 in einer andern gestalt zwar (denn 8 und 2×4 ſind im äusern etwas fershidnes), alein doh immer wider (da $2 \times 4 = 8$ ist). Wenn man alſo auh alle eigenshaften eines dinges oder fon etwas begreift, ſo hat man dadurh nur alle eigenshaften eines dinges oder fon

etwas begriffen, aber niht das ding oder etwas unter einem andern äusern oder einer andern gestalt (form), und folgt daraus, das in einer bestimmung (definizion) niht fon den eigenshaften eines dinges oder fon etwas di rede ſein kan, wi ſih dis einfah auh daraus ergibt, das ſih nah dem geſagten, eine bestimmung wi eine gleihung ferhält, alſo wi $8 = 2 \times 4$, worin man zum begrif fon etwas im äusern oder in der gestalt (in der form) fershidnem, im grunde gleihem, niht aber zu den eigenshaften fon etwas komt. Wenn daher Grunert in ſeinen definizionen *Eigenschaften eines Dinges oder eines Begriffs* begreift, ſo hat er niht begriffen, das eine definizion ſih wi eine gleihung ferhält, im grunde eine gleihung ist und kan daher auh nur einen beshränkten begrif fon dem haben, was eine gleihung ist.

Legendre ſagt, *Die Linie iſt eine Länge ohne Breite* (ſihe ſ. 2), was eine unrihtige bestimmung genant werden mus, da ſih in einer bestimmung di ſeiten gleih ferhalten müssen, dis aber in der Legendreshen bestimmung niht der fal ist. Eine linie (ein strih) ferhält ſih wi ein weg; wi einen weg, ſo kan man ſih auh eine linie lang, breit und hoh denken, niht ſo länge. Da ſih mithin linie (strih) und länge niht gleih ferhalten, in der gleihung der bestimmung di beiden ſeiten aber im grunde gleihes, nur im äusern fershidnes ſein müssen, ſo erhält man in der Legendreshen bestimmung eine unrihtige gleihung. Grade ſo unrihtig wi Legendre hat ſih auh shon Euklid ausgedrükt, wenn Euklid ſagte, *γϱαμμη μηκος απλατες*, eine linie (ein strih) ist eine länge one breite.

Legendre ſagt (ſihe ſ. 2): *Die gerade Linie iſt der kürzeſte Weg von einem Puncte zum andern.*

Eine linie (ein strih) ferhält ſih wi ein weg, denn etwas ſih worauf bewegendes (fortbewegendes) maht einen weg, alſo auh ein blei-stift, mit dem eine linie (ein strih) gezogen wirt, da in demſelben etwas ſih worauf bewegendes erhalten wirt, das einen weg maht. Mithin ist eine linie (ein strih) ein weg. Ein weg kan breit ſein, ebenſo eine linie (ein strih); indes denkt man ſih gewönlih einen weg nur lang, als etwas, das länge aber keine breite hat, und ebenſo eine linie (einen strih). Da ſih eine linie (ein strih) wi ein weg ferhält, und di ſeiten einer bestimmung wi di ſeiten eines ferhältnisses oder einer gleihung, ſo mus, wenn weg und linie (strih) in fergleih kommen, das, was dem einen zugelegt wirt, auh dem andern zugelegt werden, um das gleihe der beiden ſeiten zu erhalten, und mus daher geſagt werden, fom wege, das er grade ist, wenn der weg mit einer geraden linie in fergleih gebraht wirt.

Wirt geſagt, di linie ist ein weg, ſo ferhält ſih das wi $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$; man hat etwas im äusern fershidnes (linie, weg, $\frac{8}{4}$, $\frac{6}{3}$) im grunde aber gleihes (di linie ist im grunde ein weg, $\frac{8}{4}$ ist im grunde $\frac{6}{3}$). Wirt zum gleihen gleihes gelegt, ſo bleibt es ſih gleih; di gerade linie ist ein gerader weg ferhält ſih wi $2 + \frac{8}{4} = 2 + \frac{6}{3}$; di gerade linie ist ein niht krummer weg wi $\frac{1}{5} + \frac{8}{4} = \frac{2}{10} + \frac{6}{3}$ (grade und niht krum ſind etwas im äusern fershidnes, im grunde gleihes wi $\frac{1}{5}$ und $\frac{2}{10}$); di gerade linie fon einer stelle zur andern ist ein niht krummer

weg fon einer stelle zur andern wi $\frac{1}{5} + \frac{8}{4} + 1 = \frac{2}{10} + \frac{6}{3} + 1$. Wirt fon beiden ſeiten der lezten bestimmung fon einer stelle zur andern = 1, weggenommen, ſo bleibt ſih alles gleih; es läst ſih aber niht nur fon einer ſeite fon einer stelle zur andern = 1 wegnemen, weil dan di gleihung der bestimmung niht erhalten würde, wi man dis ſit, wenn fon $\frac{1}{5} + \frac{8}{4} + 1 = \frac{2}{10} + \frac{6}{3} + 1$ nur fon der einen ſeite 1 weggenommen wirt, es ist niht $\frac{1}{5} + \frac{8}{4} = \frac{2}{10} + \frac{6}{3} + 1$. Alſo hat Legendre unrihtig bestimt (begriffen), wenn er nur auf einer ſeite *von einem Puncte zum andern* und niht auf beiden ſeiten ſeiner gleihung *von einem Puncte zum andern* erhalten wil. Er durfte niht ſagen, *Die gerade Linie iſt der kürzeſte Weg von einem Puncte zum andern*, ſondern muste ſagen, *Die gerade Linie* fon einem punkte zum andern *iſt der kürzeſte Weg von einem Puncte zum andern*, alein auh ſo ist es niht zu begreifen, da das der linie zugelegte (*grade*) und das dem wege zugelegte (*kürzeſte*) niht in gleihem fal ist (das eine ist ungesteigert, das andre gesteigert, das eine stet im komparatif, das andre im ſuperlatif), was niht ſein darf, da ſih dis ebenſo ferhält wi wenn man der einen und andern ſeite einer gleihung (der gleihung der definizion) ungleihes in der menge zulegen wolte, wodurh di gleihung niht erhalten werden könte, oder wodurh man zu einer unrihtigen bestimmung kommen müste. Alein es läst ſih auh niht ſagen, *Die gerade Linie iſt ein kurzer Weg*, oder *Die geradſte Linie iſt der kürzeſte Weg*, weil das gerade und kurze niht etwas im grunde gleihes ſind wi das grade und nihtkrumme, das niht lange und kurze, das beshränkte und endlihe (begrenzte). Das gerade ist der gegenſaz des krummen, mithin ſind grade und niht krum etwas zwar im äusern fershidnes, im grunde aber gleihes, und ferhalten ſi ſih dadurh wi $\frac{1}{5}$ und $\frac{2}{5}$, di etwas im äusern fershidnes, aber im grunde gleihes ſind; alein das kurze ist niht immer das gerade, da eine krumme linie fil kürzer als eine gerade ſein kan, das mer und minder kurze oder das weniger und mer lange ferhält ſih aber wi das in der menge oder zal fershidne, und läst ſih daher niht auf di eine ſeite der gleihung grade, auf di andre kurz, bringen, wi dis mit grade und niht krum, niht lang und kurz, di niht längste und kürzeste anginge, wenn di gleihung der bestimmung rihtig erhalten werden ſol.

Legendre maht ganz dasſelbe ferſehen bei ſeiner bestimmung, was eine gerade linie ist wi Brandes, wenn diſer ſagte, *eine begränzte Fläche iſt eine Figur*, da der eine wi andre niht begrif, was eigentlih zu bestimmen ist. Legendre begrif niht, das in dem fon îm zu bestimmenden nur zu bestimmen ist, was das gerade an einer linie ist, und Brandes begrif niht, das in dem fon îm zu bestimmenden nur das begrenzte an einer flähe zu bestimmen ist. Ganz ſo wi diſen beiden gelerten erging es auh Nauman, der niht begrif, das wenn man n ſeitige flähen hat, das, was flähe ist, als bekant forausgeſezt werden mus und man alſo nur zu bestimmen hat, was das n ſeitige an den flähen ist und läst ſih dis dadurh bestimmen, das man ſagt, n ſeitige flähen

ſind flähen mit n ſeiten, wobei im äusern etwas fershidnes erhalten wirt (n ſeitig und n ſeiten).

Wenn Brandes, Nauman und andre matematiker di zeihnungen auf iren tafeln figuren nennen (fig. 1, fig. 2 u. ſ. w.), ſo ſind ire figuren fershidne gezeihnete gestalten und wenn ſi dan eine flähe eine figur nennen, ſo ist das ebenſo wi wenn man ſagte, eine flähe ist eine gezeihnete gestalt; Brandes, Nauman und andre matematiker ſind gezeihnete gestalten, ſi ſind nihts wirklihes, ſi ſind blose figuren, für welhe bestimmung ſi ſih wol ſer bedanken werden, wobei es aber bleiben mus, wenn ſi niht zur einſiht kommen, das es inen bei iren bestimmungen wi Euklid ergangen ist, der im hinſehen auf ſeine figuren (zeihnungen) di blosen figuren mit dem wirklihen ferwexelte und dadurh zu unrihtigen bestimmungen kommen muste.

Unſre matematiker ferstehen fortreflih in iren rehnungen gleihungen und ferhältnisse zu begreifen, gleihwol haben ſi einen beshränkten begrif fon dem allen, weil ſi am ende doh nur einſeitig oder beshränkt gleihungen und ferhältnisse begreifen oder das, was ſi in iren blosen zalen-ferhältnissen und gleihungen haben, niht weiter anzuwenden wissen. Wenn Legendre ſagt, *Die gerade Linie iſt der kürzeſte Weg von einem Puncte zum andern*, ſo hat Legendre niht begriffen, was man zu erhalten hat, wenn man ſagen wil, was etwas ist, er erhält einen unrihtigen begrif fon der gleihung oder dem ferhältnis der definizion; er hat es niht ferstanden, das zu bestimmende und das bestimte als etwas aufzufassen, das ſih wi di ſeiten einer gleihung ferhält, das zwar im äusern etwas fon einer gleihung fershidnes, im grunde aber dasſelbe ist, und daher wi eine gleihung begriffen werden mus, wenn man rihtig bestimmen wil.

Zeihnet man zwishen zwei punkten fershidne (mer und minder) grade linien, ſo ist di gradste oder di grade linie di kürzste linie, und hätte alſo Legendre nah der zeihnung reht, wenn er di grade linie di kürzste zwishen zwei punkten nent, alein doh nur beshränkt reht, weil er das, was eine grade linie ist, nur in beshränktem ſin (im endlihen), niht aber in niht beshränktem ſin bestimt hätte. Denkt man ſih grade und krumme linien zwishen zwei unendlih weit fon einander gelegnen stellen, ſo komt man bei allen zu unendlih langen linien, und kan dan niht di rede fon einer langen und kurzen linie ſein. Wenn man aber ſagt, eine grade linie ist eine niht krumme linie, ſo bleibt di bestimmung rihtig, mag man ſih di linie endlih oder unendlih lang denken, und wäre alſo diſe bestimmung eine niht beshränkte, weil ſi auh in niht beshränktem ſin erhalten werden kan.

Wenn man das, was man bei einer bestimmung zu begreifen hat (zwei ſeiten eines ganzen, di im äusern etwas fershidnes, im grunde gleihes haben) bestimt und darnah Euklids und Legendres bestimmungen einer geraden linie beurteilt, ſo ſit man, das ſi das, was eine grade linie ist, niht reht bestimt haben. Si wolten di bestimmungen aus linien, di ſi gezeihnet hatten, treffen, musten ſi aber ferfelen, weil ſih aus der zeihnung (dem bilde) fon etwas niht oder nur beshränkt das wirklihe begreifen läst. Wenn man nah der zeihnung fon etwas das wirklihe begreifen wolte, ſo würde man grade das gegenteil dafon haben, was das wirklihe ist, woher man Legendre ſagen könte, di

grade linie ist niht di kürzste, ſondern grade di längste linie. Weshalb gehen di menshen ſo gerne auf krummen wegen? Niht etwa, weil ſi diſe wege für di nähsten, alſo kürzsten wege, zu irem zile halten? di graden wege für di längsten wege? — Dan begriffe man aber den graden weg niht als den kurzen, ſondern als den langen weg. Ist niht ein grader mensh gros (durh das grade in ſeinem ſin) zu nennen? Hat das grose niht länge? — Dan aber müste man ſagen, das ein grader mensh ein groser, ein langer mensh ist, alſo das grade das grose, das lange, aber das krumme oder niht gerade das niht grose, niht lange, das kurze ist.

Wenn man einen ganz krummen menshen einen ganz graden menshen nent, alſo ein ganz krummer mensh ein ganz grader mensh ist, ſo mus der ganz grade mensh in beshränktem ſin ein ganz krummer mensh ſein, und käme man dazu einen ganz graden menshen einen ganz krummen menshen zu nennen, wenn man în aus etwas beurteilen wolte, was er wol in beshränktem ſin, ſonst aber niht ist. Das, woraus man în in beshränktem ſin beurteilte (das äusre, das niht wirklihe), ferhält ſih zu îm (dem inren, wirklihen menshen) wi ein bloses bild (etwas niht wirklihes) zum wirklihen, und ſit man alſo, das man niht aus einem bilde (einer zeihnung) ſagen darf, was etwas (eine grade linie) ist, wenn man ſagen wil, was etwas ist. Wenn jemand fon einem ganz krummen menshen ſagte, er ist ein ganz grader mensh, ſo gäbe er damit zu ferstehen, das man niht nah dem äusern (dem bilde, dem niht wirklihen) das, was etwas ist, (das wirklihe) beurteilen darf, um einen rihtigen begrif fon etwas zu bekommen oder aber hinzufügen mus, im äusern (im bilde, in der zeihnung, im beshränkten ſin) ist er ein ganz krummer mensh (ſonst aber niht); ebenſo in der zeihnung ist di grade linie unter allen linien zwishen zwei punkten di kürzste linie (ſonst aber niht).

Das ware ist niht das ware in beshränktem ſin. Dis ist niht das ware, und wenn man das ware daran begreift, ſo begreift man nur den shein des waren, aber das (wirklih) ware niht, und begreift ſomit kein mensh das ware, weil alle es nur in beshränktem ſin begreifen, und das es nimand begreift, wirt daraus erſehen, das, wenn ſi ſagen, was das ware ist, ſi es niht reht ſagen.

Legendre behält Euklids bestimmung der linie (*Die Linie iſt eine Länge ohne Breite*), fand ſi alſo rihtig, wärend er Euklids bestimmung der geraden linie (*ευθεια γραμμη εστιν, ἡτις εξ ισου τοις εφ ἑαυτης σημειοις κειται, recta quidem linea eſt, quae ex aequo ſua interiacet puncta,* eine grade linie ist eine linie, di gleih an iren zeihen ligt) niht behilt, und ſi alſo unrihtig fand. In ſeinem ferſuh eine besre bestimmung als di Euklids zu treffen, traf er aber eine bestimmung, di am ende niht besser ist.

Euklid ſagt, *επιφανειας περατα γραμμαι*, di enden einer flähe ſind gezeihnete strihe, was rihtig ist, wenn man Euklids bestimmung auf eine gezeihnete endlihe flähe, deren enden gezeihnete strihe ſind, anwendet, alein unrihtig, wenn man ſi überhaupt auf eine flähe anwendet, da an einer flähe, di eine wiſe ist (einer wiſen-flähe), di enden niht strihe, ſondern wald, berge, wasser ſind, und an einer unendlihen flähe fon enden gar niht di rede ſein kan. Es hätte alſo Euklid das, was eine flähe ist, nur beshränkt begriffen, und käme er darauf zu ſagen, eine flähe ist eine figur (eine zeihnung), denn da er

ſagt, an einer flähe ſind di enden gezeihnete strihe ($\gamma\varrho\alpha\mu\mu\eta$ ein strih beim zeihnen, eine zeihnung), ſo komt er an einer flähe zu einer zeihnung oder ist nah îm eine flähe eine figur. Euklid ſa alſo niht ein, das man zwar eine gezeihnete flähe wi eine wirklihe (eine flähe) nennen kan (mus), alein, das, wenn man bestimmen wil, was eine flähe ist, niht nah einer gezeihneten flähe bestimmen darf, was eine flähe ist.

So einfah es sheint, zu ſagen, was man bei einer bestimmung (definizion) zu begreifen hat, ſo haben es doh di matematiker niht ferstanden zu ſagen, und mus es daher wol nur einfaher sheinen als es im grunde der fal ist, weil ſi es ja doh ſonst auh geſagt hätten.

Das meiste, was ih ſage, trägt den shein des ſer einfahen an ſih, aber man täusht ſih, wenn man glaubt, das es ſo einfah ist, das man wol auh darauf gekommen wäre.

Etwas, das einem ganz einfah ersheint, aber doh im grunde niht ganz einfah ist, begreift man erst reht, wenn man rihtig begreift. Solange dis niht der fal ist, ist man dabei in einer täushung begriffen, in der man dem unreht tut, der das für ganz einfah gehaltne forbringt. Erst wenn man zu rihtigen (niht einſeitig rihtigen) begriffen komt, begreift man das einfahe, das niht ganz einfah ist, und findet das shöne im einfahen, durh das alles erhalten wirt, das erhalten werden ſol. —

Folge des unrihtigen begreifens fon dem, was addiren heist.

Om ſagt in ſeinem *Lehrbuch* ſ. 4:

So iſt z. B. $5 + 3 = 4 \,.\, 2 = 8$. *Der Ausdruck* $5 + 3$ *iſt nun eine Summe; der Ausdruck* $4 \,.\, 2$ *ein Produkt und die Zahl* 8, *welche beiden gleich iſt, darf weder Summe noch Produkt genannt werden, wenn nicht* (*bei dem Anfänger*) *eine Verwirrung der Begriffe entſtehen ſoll.*

Om hätte ſih anders ausgedrükt, wenn er reht begriffen hätte, was man in der addizion erhält, das man in der addizion dreierlei hat, das, wozu etwas gezält werden ſol, das zuzuzälende und das gezälte oder di zal des zuſammengezälten, denn hätte er das reht begriffen, ſo würde fon îm di addizion niht durh $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, ſondern $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ oder $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ bezeihnet worden ſein, er würde dan niht geſagt haben, *der Ausdruck* $5 + 3$ *iſt eine Summe, die Zahl* 8, *welche* $5 + 3$ *gleich iſt, darf nicht Summe genannt werden.* **5** taler und **3** taler ſind zwei ſummen und bezeihnet man ſi durh $\mathbf{5 + 3}$ oder $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, ſo erhält man immer nur wider zwei und niht eine ſumme, **8** ist ire ſumme, di ſumme der beiden ſummen **5** und **3**. Wenn Om in $\mathbf{5 + 3 = 8}$ $\mathbf{5 + 3}$ und niht **8** ſumme nennen wil, was ſind dan ſummen? — Wenn Om nur einfah ſagen wolte $\mathbf{5 + 3}$ ist etwas zuſammenzuzälendes (zu ſummirendes), **8** ire ſumme (ire zal), ſo würde das geshehen, wofor er ſih den anshein gibt, das er es niht tut und andre ſih in aht nemen ſollen. Durh ſeine art ſih auszudrükken, **8** niht eine ſumme zu nennen, ferwirt er, denn es kan nur $\mathbf{5 + 3}$ in $\mathbf{5 + 3 = 8}$ etwas zuſammenzuzälendes (ſummanden), aber niht eine ſumme (eine zal), ſondern nur **8** eine ſumme genant werden. Das zuſammenzuzälende ist niht das zuſammengezälte und ist beides in der zälung (addizion) zu

untersheiden und mus untershiden werden, wenn man ſih rihtig ausdrükken wil. — Bezeihnet man **5 + 3 = 8** mit buhstaben, ſo kan man dis entweder ſo tun, das man **a + b = c** oder aber **a + b = (a + b)** shreibt, man darf aber niht **a + b = a + b** shreiben, weil in **a + b** das zuſammenzuzälende, in **(a + b)** das zuſammengezälte erhalten wirt, di ſih zu einander wi das herforbringende und herforgebrahte (wi di mutter zu irem kinde) ferhalten und da dis niht etwas gleih zu begreifendes ist, ſo darf es auh niht gleih bezeihnet werden.

Wenn Om 2×4 stat 8 produkt nent, ſo ist das ebenſo ferkert wi wenn er $3 + 5$ stat 8 ſumme nent. Es ferhält ſih in $2 \times 4 = 8$ 2×4 zu 8 wi das herforbringende zum herforgebrahten. Nah der bezeihnung ist zwar 2×4 ebendaſſelbe was 8 ($2 \times 4 = 8$), alein, wenn man nah der bezeihnung ſagen wil, das 2×4 produkt ist, ſo komt man zu einer unrihtigen bestimmung dafon, was man beim meren wirklih erhält, bei dem 2×4 das produzirende, niht aber das produkt ist, welhes in 8 erhalten wirt. Wenn Om meint, das man alles nennen kan, wi man wil, ſo ist das ganz gut, nur mus man einem beim nennen fon etwas niht zeigen können, das er rihtig anders nennen (nemen) müste. Ein unrihtiger name ist di folge fon etwas unrihtig begrifnem, und ist begreiflih, das Om zu unrihtigen namen kam, da im nahgewiſen werden kan, das, wenn er auh fom zälen (rehnen) einen rihtigen begrif zu haben glaubt, doh am ende nur einen beshränkten begrif hat.

Wenn Om fon $647 + 928$ auf *die Form* 1575, fon $5 + 3$ auf *die Zahl* 8 komt, ſo begreift man niht, weshalb er niht auh auf *die Form* 8 stat *die Zahl* 8 komt, und weis man niht, wi man eine *Form* (1575) fon einer *Zahl* (8) untersheiden ſol. Kan man in 1575 niht nur eine *Form*, ſondern auh eine *Zahl* begreifen, oder in jeder zal eine form, ſo ist jede zal auh eine form, und könte man dan ebenſo gut *mit Zahlen* als *Formen* zälen (rehnen), aber man begriffe ſo niht, wi Om ſagen kan, *rechnen kann man nur mit Ausdrücken* (*Formen*), *aber nicht mit Zahlen*, wonah man *Zahlen* und *Ausdrücke* (*Formen*) zu untersheiden hat, *Zahlen* keine *Formen* ſind.

Der ausdruk (di form) der matematiker.

Es ist niht zu ferstehen wi Om darauf gekommen ist, zu ſagen, *der Ausdruck* $5 + 3$, *der Ausdruck* $4 . 2$. Wenn man zu **3** einheiten **5** hinzurehnet und **5 + 3** shreibt, ſo hat man etwas gedahtes, etwas in gedanken gehabtes bezeihnet, man hätte alſo in **5 + 3** ein zeihen fon etwas gedahtem und zwar ein rehen-zeihen, weil das gedahte etwas ist, wobei man zalen hatte, fon zalen auf zalen kam. Das, worauf Om hätte kommen ſollen, auf rehenzeihen als namen für **5 + 3**, **8**, **4 . 2** ist er niht gekommen; ſondern auf etwas, worauf man niht komt.

Wirt ein baum birke, dan der weisstämmige baum des nordens genant, ſo hat man ſih fershiden über ein und daſſelbe ausgedrükt, der ausdruk ist ein fershidner, der inhalt (das im ausdruk enthaltne, zu begreifende) daſſelbe. In diſem ſin kan man ſagen, **5 + 3** ist im grunde daſſelbe was **8** oder **4 × 2** ist, denn alle enthalten gleih fil einheiten (nämlih **8**) oder ſind nur etwas

fershiden ausgedrüktes (ſind fershidne ausdrükke) für etwas, das alle enthalten. Daher ferhilten ſih denn **5 + 3**, **8**, **4 × 2** wi gefäse (töpfe, formen), di dasſelbe enthalten oder in denen ein und dasſelbe getragen wirt. Das hat Om niht begriffen, denn ſonst hätte er geſagt, *der Ausdruck* 5 + 3, *der Ausdruck* 4 . 2, *der Ausdruck* 8, niht aber *die Zahl* 8. 5 + 3 oder 4 . 2, aber niht 8 ausdruk (eine form) nennen wollen, das ist ebenſo wi wenn man ſagte, zwei mit klammern ferbundne gefäse [**5 + 3**, **4 × 3**] ſind etwas fon einem meister (dem töpfer) gefastes, gebildetes, ausgedrüktes, geformtes, ſind eine form (ein ausdruk) eines meisters (des töpfers), aber bei leibe niht ein gefäs alein (**8**), das ist keine form (kein ausdruk), das ist niht etwas fom töpfer gefastes und fon keinem töpfer zu fassendes und **wenn auh fon einem töpfer, ſo doh niht etwas fon einem matematiker zu fassendes.**

Was ein matematiker ſagt, das rehnen heist.

Om ſagt in ſeinem *Lehrbuch* auf der ersten ſeite und der folgenden:

Die unbenannten (ganzen) Zahlen führen uns zu den Zahlen-Verbindungen (Operationen), durch welche (im Verſtande) zwei Zahlen a und b zu einer dritten c verbunden gedacht werden. — Man betrachtet drei direkte Zahlen-Verbindungen, nämlich die Addition (angezeigt durch $a + b$*), die Multiplikation (angezeigt durch* $a . b$ *oder* $a \times b$ *oder* ab*) und das Potenziren (angezeigt durch* a^b*). — — — —*

Das angezeigte Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, Potenziren, Radiciren und Logarithmiren iſt der (in die äuſzern Sinne fallende) Repräſentant des gedachten, d. h. des wirklichen Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens, Dividirens, Potenzirens, Radicirens und Logarithmirens.

Da a + b, Oms *angezeigte Addition*, ein zeihen ist, mit dem man etwas, das man rehnet (zält), bezeihnet, oder das zeihen eines rehners (zälers) ist, und ein repräſentant des wirklihen rehnens (addirens u. ſ. w.) ein wirkliher rehner, ein repräſentant des wirklihen rehnens im äusern ein wirkliher rehner im äusern, diſer aber nur ein rehner im leibe (bei leibe) ſein kan, ſo wäre nah Om das zeihen eines rehners (a + b) der leibhafte rehner, woraus folgen würde, **das Om das wirklihe (den rehner) für nihts (ein bloses zeihen), das niht wirklihe aber (ein bloses zeihen eines) für etwas (für das wirklihe) hält. Om ferwexelt das wirklihe mit dem zeihen des wirklihen.** Mag man einen rehner im äusern oder niht im äusern (leibhaft oder niht leibhaft) fassen, immer ferhält ſih das zeihen eines rehners (a + b) zum rehner wi das aufgezeihnete zum aufzeihner und mahte daher Om, wenn er das zeihen eines rehners (a + b) einen rehner (addirer, repräſentant des addirens) nent, das blose zeihen zum wirklihen, es wäre îm das blose zeihen fon etwas das wirklihe, was es doh niht ist.

Om färt fort:

§. 2. *Rechnen kann man weder mit Gröſzen, noch mit Zahlen, ſondern nur mit Ausdrücken, d. h. nur mit angezeigten Zahlen-Verbindungen; denn: ‚Rechnen' im durchgreifendſten Sinne des Wortes, iſt nie etwas anderes, als*

ein Umformen gedachter, d. h. angezeigter, also wirklicher Ausdrücke. — *Diese Wahrheit kann der Anfänger im Kalkul, nicht fest genug sich einprägen, weil sie allein überall einen sichern Halt und sichere Richtung gewährt.*

Wenn Om sagt, *Rechnen ist weiter nichts als ein Umformen* (andres ausdrükken) *von Ausdrücken* (formen), so ist es rihtig, wenn man nah der bezeihnung $2 \times 4 = 3 + 5 = 8$ urteilt, denn 2×4, $3 + 5$, 8 sind drei fershidne ausdrükke (gefäse), di dasselbe, nämlih 8 einheiten, enthalten, und ist nah der bezeihnung $2 \times 4 = 3 + 5 = 8$ alles rehnen im grunde nihts weiter als ein andres ausdrükken eines ausdruks, aber am ende doh nur beshränkt (nah der bezeihnung) rihtig, weil das rehnen niht ein umformen fon etwas in etwas (fon $3 + 5$ in 2×4) ist, sondern ein auffinden (auszälen, ausdenken) fon etwas aus etwas (fon 8 aus $3 + 5$ oder 2×4).

Wenn Om sagt, *Rechnen ist ein Umformen von Ausdrücken,* so ist *rechnen* und *Ausdrücke umformen* einerlei, und müste man daher *Ausdrücke umformen* stat *rechnen* sagen können, *Ausdrücke umformen mit Ausdrücken* stat *rechnen mit Ausdrücken.* Kan man ferstehen, was es heisen sol, *Ausdrücke umformen mit Ausdrücken*, so wirt man auh ferstehen, was es heisen sol, *rechnen mit Ausdrücken. Ausdrücke umformen mit Ausdrücken* ist ebenso wi töpfe (*Ausdrücke*) umformen (anders ausdrükken) mit töpfen (*Ausdrücken*), und müste man einen töpfer fragen, ob di töpfer sih so ausdrükken und es ferstehen, wenn niht, so werden si es auh niht ferstehen, was es heist, *rechnen mit Ausdrücken.* Allerdings, wirt man sagen, daran ligt nihts, wenn es nur di gelerten ferstehen, und di ferstehen shon (glauben zu ferstehen), was Om sagt.

Wenn Om sagt, *Rechnen kann man nicht mit Zahlen,* so ist zu bemerken, das man zalen zält (rehnet), also beim rehnen (zälen) zalen hat, wenn man auh ganz rihtig niht mit zalen rehnen (zälen) kan, sondern nur mit dem ferstande oder kopf (in der bedeutung ferstand), weil man one ferstand (kopf) niht zälen (rehnen) kan.

Man erhält etwas gerehnetes (gezältes, gedahtes) dadurh, das man eine zal oder zalen, di man rehnet (zält, denkt) aufshreibt (aufzeihnet), und dinen also aufgezeihnete zalen dazu, um etwas gerehnetes (gedahtes) zu erhalten (in gezeihneten zalen) wi buhstaben, di man shreibt, dazu dinen etwas gedahtes (in geshribnen buhstaben) zu erhalten oder werden mit aufgeshribnen zalen zalen, di man rehnet (denkt) auf dem papir aufbewart, aber man rehnet (zält, denkt) weder mit einer zal, noh zalen oder gezeihneten zalen. Beim shreiben komt man zu buhstaben, shreibt man buhstaben, doh shreibt man niht mit buhstaben, sondern mit einer feder oder dergleihen, weil man one feder oder dergleihen niht buhstaben shreiben (zeihnen) kan.

Wenn Om sagt, *Rechnen kann man weder mit Gröszen* u. s. w., so ist das ebenso wi shreiben kan man weder mit strihen, noh mit zalen, sondern nur buhstaben, denn shreiben heist buhstaben umformen, wobei zu bemerken wäre, shreiben heist niht buhstaben umformen, sondern gedanken und zwar niht geäuserte oder geäuserte gedanken aufzeihnen, und heist rehnen niht ausdrükke umformen, sondern zälen, denken.

Wenn Om sagt, *denn Rechnen ist* u. s. w., so wirt ein grund angezeigt, weshalb man nur *mit Ausdrücken rechnen* kan, und ist das, was Om sagt ebenso

wi malen kan man nur mit pinſeln, denn malen ist ni etwas anders als ein umformen wirkliher pinſel, wobei zu bemerken wäre, erst ſollen pinſel das mittel zum malen, und dan ſol malen nihts anders als ein umgestalten des mittels zum malen (der pinſel) ſein, (dan heist malen pinſel umformen.) Erst ſollen Oms *Ausdrücke* das mittel zum rehnen, und dan ſol rehnen nihts andres als ein umformen des mittels zum rehnen (*der Ausdrücke*) ſein. Hat man aber zu ſagen, malen kan man nur mit einem pinſel, denn malen kan man niht anders als mit einem pinſel, ſo hätte Om ſagen ſollen, *Rechnen kann man nur mit Ausdrücken, denn rechnen kann man nicht anders als mit Ausdrücken.*

Wenn Om ſagt, *Rechnen kann man nur mit Ausdrücken,* ſo begreift man niht, was er *mit Ausdrücken rechnen* kan, er müste aber etwas damit rehnen, wenn in ſeinem ausdruk ein rihtiger ausdruk erhalten würde. Wenn Om in ſeinen *Ausdrücken* ein mittel zum rehnen hat, ſo ferhält ſih der ausdruk, *etwas rechnen mit Ausdrücken* wi etwas (buhstaben) shreiben mit federn, und zeigt ſih shon hirin das unrihtige in Oms ausdruk, da wi man etwas shreiben mit einer feder (und niht federn) ſagt, ſo auh zu ſagen hätte etwas rehnen mit einem ausdruk (und niht *mit Ausdrücken*). Aber was rehnet Om nun mit ſeinen *Ausdrücken? Ausdrücke,* das wäre niht zu ferstehen, weil *Ausdrücke mit Ausdrücken rechnen* ebenſo ist wi worte mit worten ausdrükken, wobei zu bemerken ist, das man worte mit dem munde und niht mit worten ausdrükt, und lassen ſih niht worte (ausdrükke) mit worten (ausdrükken) ausdrükken, und können daher Oms *Ausdrücke* kein mittel zu *Ausdrücken* ſein oder kan man durh Oms *Ausdrücke* niht zu *Ausdrücken* kommen. Wolte man ſagen, Om rehnet mit ſeinen *Ausdrücken* eine rehnung, ſo wäre das ebenſo wi wenn man ſagen wolte, Om zeihnet mit einem bleistift eine zeihnung, wobei zu bemerken wäre, das man ſagt, ein haus oder ſonst etwas, aber niht eine zeihnung mit einem bleistift zeihnen, weil, wenn man zeihnet im zeihnen es ligt, das man eine zeihnung fon etwas maht, alſo eine zeihnung zeihnen ebenſo wäre wi eine zeihnung eine zeihnung mahen, daher man auh niht ſagen kan, *eine Rechnung mit Ausdrücken rechnen.*

Hiraus folgt aber, das man mit Oms *Ausdrücken* nihts rehnen kan, ſeine *Ausdrücke* alſo kein mittel zum rehnen ſein können, durh ſeine *Ausdrücke* niht der begrif des rehnens erhalten werden kan. Om ſagt daher mit dem, was nah im rehnen heisen ſol, am ende doh niht, was rehnen heist. Er ſagt mit al dem, was er ſagt, am ende nur etwas niht zu begreifendes, d. h. er ſagt mit al dem, was er ſagt, am ende nihts (da dis etwas niht zu begreifendes ist).

Wenn Om ſagt, *Rechnen ist nie etwas anders* u. ſ. w., ſo ist das ebenſo wi denken ist ni etwas andres als ein umformen wirkliher ausdrükke, da denken ſih wi rehnen, zälen ferhält, und alſo denken stat rehnen in das geſezt werden kan, was Om ſagt, und müste man in den ſo blos im äusern feränderten worten Oms einen rihtigen begrif erhalten, wenn Om rihtig ſagte, was rehnen heist, alein ſih in der art über das äusern, was denken heist, worauf man durh Om komt, wirt kein mensh, da man ſagen wirt, denken heist fon etwas auf etwas in gedanken kommen, das eine aus dem andern im geist erwägen, aus bekantem unbekantes ermitteln, und das ist auh rehnen (zälen).

Das höhste rehnen bestet niht in einem rehnen, bei dem man zalen hat,

ſondern in einem rehnen, bei dem man niht zalen hat, woher es fon den gewönlihen rehnern für kein rehnen gehalten wirt, obshon es doh grade das rehnen ist, durh welhes alles auszurehnen ist, was den menshen weſentlih anget, was eine ganz andre bedeutung hat als das, was di gewönlihen rehner ausrehnen und fon der menge bewundert wirt.

Wi das rehnen, das im grunde kein rehnen ist, in beshränktem ſin grade das (wirklihe) rehnen ist, ſo ist das rehnen, das im grunde rehnen ist, in beshränktem ſin grade kein rehnen, weil das an jenem, niht aber an diſem gefunden wirt, was in beshränktem ſin das rehnen ausmaht (das zälen fon zalen). Es ferhält ſih das nidre zum höhern rehnen wi das im äusern und niht im äusern zu begreifende, und müste man alſo, um das höhere rehnen zu begreifen geist haben, da man one geist nur das nidre rehnen begreift, das kein rehnen ist.

Hätte Om ſih doh nur daran gehalten, das aritmetik kunst zu zälen und im grihishen *αριϑμειν* **zälen, rehnen heist, dan hätte er darauf kommen müssen, das addiren, ſubtrahiren u. ſ. w. nur fershidne arten des zälens, im äusern etwas fershidnes ſind (daher auh di fershidnen namen, addiren, ſubtrahiren u. ſ. w.), im grunde aber dasſelbe, weiter nihts als ein zälen ſind; das man beim zälen (rehnen), wenn 5 zu 3 gezält und zuſammen 8 erhalten wirt fon etwas auf etwas komt, aus etwas etwas auffindet, daher das zälen, rehnen ein ausdenken fon etwas ist, im grunde ein denken ist. Beim denken komt man fon etwas auf etwas, findet aus etwas etwas auf und ferhält ſih das eine zum andern wi das aufshlisende zum aufgeshlosnen, wi das aufshlisende, der shlüssel zum aufgeshlosnen, zum aufshlus, wi das bekante zu dem aus diſem aufgefundnen unbekanten. Daher hat man, wenn gefragt wirt, was rehnen heist, am ende nur zu ſagen, was denken heist und dabei zu bemerken, das man gewönlih nur das denken rehnen nent, bei dem man zalen in gedanken hat und fon zalen auf zalen komt, alein im grunde alles (rihtige) denken ein (rihtiges) rehnen genant werden mus und das eine fom andern ſih nur im äusern aber niht wirklih (niht im grunde) untersheidet, das eine ſih zum andern wi das im äusern fershidne, im grunde aber gleihe ferhält, alſo wi $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{6}$, di im äusern etwas fershidnes, im grunde aber ein und dasſelbe ſind, denn $\frac{2}{3}$ ist im blosen zalen-begrif niht $\frac{4}{6}$, aber es ist doh $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.**

So einfah das alles zu ſagen ist (ih denke, wol ein jeder leſer wirt glauben, das er es ſo auh hätte ſagen können, das ei ſo auh auf di spize hätte stellen können), ſo weis es doh kein matematiker zu ſagen, wi man dis daraus erſit, wenn es einer (Om) ſagen wil, was rehnen heist. Es ligt aber auf der hand, das, wenn man niht reht zu ſagen weis, was etwas ist, etwas niht ſo ſagt, wi man es ſagen mus, fon etwas spriht, wofon man niht reht weis, was es ist und hat daher Om fon etwas (fom rehnen) gesprohen one doh eigentlih zu wissen was es (was rehnen) ist.

Daraus ist zu shlisen, das man ein groser rehner (ein angeſener matematiker) ſein kan, wi Om und doh im grunde niht weis, was rehnen ist,

was man unter matematik zu ferstehen hat (man erinre ſih des, was Brandes ſagt), ja aus dem, was ih fon Euklid, Brandes, Legendre, Laplace und andern matematikern zu leſen bekommen habe, mus ih shlisen, das keiner fon inen etwas besres als Om forgebraht hätte, es allen dabei ſo ergangen wäre wi bei iren definizionen fon figur, gröse, ferhältnis, aus denen man mit staunen erſit, das nimand, auh niht Einer, zu ſagen weis, was eine figur, eine gröse, ein ferhältnis ist.

Um mih zu beleren, um zu wissen, was denn eigentlih rehnen heist, ging ih zu den matematikern, shlug ire werke auf, um fon inen zu erfaren, was ſi darüber ſagen und staunte ih als ih ſa, das am ende alle andern besser als ſi ſagen würden, was rehnen heist, was ein ferhältnis, was eine figur, eine gestalt, was gröse ist.

Hirbei fält mir Sokrates ein, den ih forher gegen Laplace in shuz nemen muste, was er für erfarungen mahte als er zu den in der wissenshaft angeſenen ging, um ſih zu unterrihten.

Mit dem, was ih fon den matematikern geſagt habe, ferhält es ſih wi mit dem, was Sokrates fon unſern dihtern und andern künstlern und weiſen geſagt hat, ir wissen ist ein wissen, ja, aber niht ein rehtes wissen, ein wissen im äusern, im grunde kein wissen. — — — —

Was Sokrates erfur, als er zu den angeſenen ging, um fon inen belert zu werden.

In ſeiner ferteidigung bemerkt Sokrates nah Platon (aus der überſezung der Platonshen werke fon graf zu Stolberg, Apologie oder Vertheidigung des Sokrates von Platon, S. 11 — 16), das Chärefon got in Delfi gefragt hatte, ob einer weiſer als Sokrates wäre und îm durh di Pytia (di mitlerin zwishen got und den menshen in Delfi) geſagt worden war, nimand ist ſo weiſe wi Sokrates.

Sokrates: Als ih das fon der Pytia geſagte zu hören bekam, dahte ih, was ist damit fon got gemeint? Was wirt fon îm wi in einem rätsel angedeutet? Ih wüste grade niht, das ih etwas mer wüste als alle andern. Was meinte got damit, wenn ih ſeinem ausspruh nah der weiſeste (unter den menshen) ſein ſol? Und doh mus es ſo ſein, wi er ſagt, denn got lügt niht, das kan er niht. Lange dahte ih darüber und blib im zweifel, doh kam ih endlih auf einen gedanken — ih begab mih zu einem man, der zu denen gehörte, di für weiſe angeſehen werden in der hofnung durh în wenn irgend durh jemand den Delfishen ausspruh zu widerlegen und der Pytia ſagen zu können, das ist doh einer, der weiſer als ih ist und wäre ih alſo niht der weiſeste, wofür du mih ausgegeben hast. Als ih mih darauf mit îm unterhilt (es ist niht nötig în zu nennen, es war indes ein statsman, der für ſer weiſe gehalten wurde), ging es mir ſonderbar mit îm, es kam mir am ende ſo for als wenn er zwar den shein des weiſen hätte, aber niht weiſe war, obshon alle und er ſih ſelbst am meisten dafür hilt. Darauf ſuhte ih îm zu zeigen, wi es ſih mit ſeiner weisheit ferhilte, er am ende nur weiſe zu ſein wänte aber keinesweges weiſe genant werden könte. Ih wurde îm ferhast und niht nur îm, ſondern auh

andern, di das hörten, was ih ſagte. Wi ih fon îm ging dahte ih, etwas weiſer als diſer mensh wäre ih am ende denn doh; freilih mag wol keiner fon uns das Shöne und Gute reht kennen, aber er wänt etwas zu kennen und kent es doh niht, dagegen ih es niht kenne und auh niht zu kennen wäne. Es komt mir denn doh ſo for als wenn ih in etwas und zwar dadurh weiſer bin als er, das ih niht im wane bin etwas zu wissen, wofon ih nihts weis.

Hirauf ging ih zu einem, der im anſehen fon noh mer weisheit als der erste stand und da kam es mir dan ſo for als ob es ſih mit diſem niht anders als mit jenem ferhilte. Auh er nam nur ärgernis am ende an mir und wurde ih îm ferhast.

Fon diſem ging ih zu andern und ſa nur immer, das ih mih ferhast mahte, hatte harm und furht, weil ih es für nötig hilt, um des rehten willen (um des gottes willen) alles hintanzuſezen und niht dafon zu lassen, di bedeutung des götlihen ausspruhs zu ergründen.

Aber bei meiner treu, denn ih mus euh alles treu ſagen, es ging mir in der tat ſo, das grade ſolhe, di im grösten anſen standen mir, als ih mih mit inen des götlihen ausspruhs wegen unterhilt, wi di elendesten forkamen, dagegen andre, di grade kein anſen hatten, kamen mir ſo for als wenn ſi ferständiger wären.

Ih ging zu ſolhen, di trauer-spile gedihtet haben und andern dihtern, um mih wo möglih bei inen auf frisher tat fangen zu lassen, das ih unwissender bin als ſi. Ih nam ire werke und zwar ſolhe, di mir di besten zu ſein shinen und ſuhte dan fon iren urhebern zu erfaren, was ſi mit dem meinten, das ſi ſagten und hofte dabei zugleih, etwas fon inen zu lernen. Ih shäme mih aber, ir männer, euh di warheit zu ſagen, mus es aber doh tun. Fast alle, di zugegen waren, wusten besser als di dihter etwas darüber zu ſagen, wofon di dihter in iren gedihten gesprohen hatten. Ih wart der überzeugung, das di dihter eben niht weiſe ſind, weil ſi etwas shönes gedihtet haben, ſondern das herforbringen fon gedihten eine beſondre gabe ist und ſih di dihter mit iren gedihten ſo ferhalten wi di weisſager und ſänger gottes mit dem, was diſe ſagen und ſingen, di auh etwas shönes ſagen und ſingen, fon dem, was ſi ſagen und ſingen, aber nihts ferstehen. Dabei muste ih ſehen, das di dihter irer shönen gedihte wegen ſih auh in allem andern für klüger als andre hilten, was ſi doh niht waren. Wi ih fon inen ging, dahte ih, nah den gemahten erfarungen doh auh for den dihtern etwas foraus zu haben.

Am ende ging ih zu den künstlern. Ih war mir bewust, das ih fon den künsten ſo fil wi nihts ferstand und war alſo gewis, das ih in den künstlern männer finden würde, di file und shöne kentnisse beſizen. Darin irte ih auh niht. Si wusten manhes, das ih niht wuste, waren alſo in manhem klüger als ih, aber, ir Atener, es kam mir ſo for als wenn ſi auh wi di dihter in einem wane und zwar demſelben befangen wären. Weil ſi ire kunst ferstanden, ſo glaubte jeder fon inen in allem übrigen auh alles besser zu wissen als andre. Diſer eigendünkel mahte, das auh das, was ſi wusten, alle bedeutung ferlor und ih mih fragte, was ih wol wälen würde ſo zu bleiben wi ih bin, zwar niht ire kentnisse zu haben aber auh niht in irer art unwissend zu ſein oder ire

kentnisse zu haben aber in irer art unwissend zu ſein; ih ſagte mir, das es wol am besten für mih ſein würde ſo zu bleiben wi ih bin.

Durh alles das habe ih mir aber, ir Atener, eine menge heimliher und offenbarer feinde zugezogen, daher aber auh der name des Weiſen, den man mir gegeben hat, denn alle glaubten das ih in dem, worin ih andre widerlegte, weiſe genant zu werden ferdinte.

In der tat aber, ir männer, ist got wol weiſe und ist das durh ſeine mitlerin in Delfi geſagte wol ſo gemeint, das di weisheit der menshen wenig oder gar keine bedeutung hat. Es komt mir ſo for, das Sokrates nur genant wirt, got nur ſagen wolte, der unter den menshen ist weiſe, der (wi Sokrates) erkent, das di weisheit der menshen nihts wert ist. — — — — — —

Welher shlus Sokratesses, unſer wissen ist nihts wert. Alſo ist auh alles das, was man besser als andre weis, nihts wert oder hat nur inſofern wert als man andern zeigen kan, das ſi etwas niht reht wissen, weiter hat es aber keinen wert und hat man nihts dafon, denn wi Sokrates oftmals ſagt, wert hat für den menshen nur, das er das rehte tut, ſih am rehten hält, des rehten wegen ſih und alles fergist, ſih hingibt, des rehten wegen das leben ferlirt, — wer das tut, das ist ein rehter man, aber wenn man auh himmel und erde zu bewegen wüste wi Arhimedes und niht das rehte täte, ſo ist man kein rehter man; wenn man alles besser als andre wüste und niht am rehten hilte, ſo ist alles wissen am ende nihts wert. Da di torheit nihts wert ist, ſo ferhält ſih und ist im grunde alle weisheit der weiſen nur torheit. Das folgt aus dem, was Sokrates ſagt.

Man wirt, da ih ſo sprehe, wol einſehen, wenn man nur etwas ferständig ſein wil, das es beim shreiben diſes buhs niht meine abſiht geweſen ſein kan, einen zu kränken oder zu ferlezen, ſondern ſimer meine abſiht nur ſein kan, di in und durh unwissenheit kranken und ferlezten auf das rehte (das heilende) zu bringen. — — — — — — — — — — — — — — — — — —

Shön und einfah rehtfertigte ſih Sokrates for geriht über di im gemahten beshuldigungen, das er durh ſein sprehen di jugend (di menshen) ferdirbt und niht reht an di götter glaubt (andre götter einfüren wil); er fergab ſih nihts for ſeinen rihtern, er sprah niht nah irem munde, um dadurh dem todes urteil zu entgehen oder das urteil zu mildern. Doh wurde er ebendeshalb, was ſonst di menge alles zu loben weis, fon der menge in irem geriht ferurteilt.

Rehtfertigte ſih Galilei for geriht ebenſo einfah und shön wi Sokrates? Fergab er ſih auh nihts for ſeinen rihtern, sprah er auh niht nah dem munde derſelben, um dadurh dem todes urteil zu entgehen?

Nein, ſo wi Sokrates ferhilt ſih Galilei niht, weil um ſo wi Sokrates ſih zu ferhalten in einem ein ungewönliher geist ſein mus und einen ſolhen geist hatte Galilei niht. Nimmer hätte Sokrates das geſagt, was Galilei ſagte, ih shwöre mit aufrihtigem herzen und ungeheuheltem glauben alle di mir forgehaltnen irtümer und meinen teufelsglauben ab, ferabsheu und ferfluh alles, was ih geſagt habe. Wenn Galilei darauf, als er fon ſeinen rihtern losgekommen war, ausrif, und doh bewegt ſi ſih (di erde), ſo hat er das, wi man ſih denken kan, ſo getan, das ſeine rihter es niht weiter zu hören bekamen.

Galilei hat ein unreht am rehten begangen, denn da, wo er hätte fürs rehte einstehen ſollen, hat er es niht getan, was nur ein niht groser geist tun kan und ist man daher im irtume, wenn man einen grosen matematiker one weitres einen grosen geist nennen wolte, wi es Laplace tut.

Unſre matematiker gefallen ſih darin den geistlihen forzuhalten, was ſi (das ſi einen mord) an Galilei begangen haben, da niht Galilei unreht hatte, nur ſi zu rihten geweſen wären; ſi ſolten aber dabei doh niht fergessen, das es niht alein geistlihe, ſondern auh matematiker waren, di Galilei ferurteilten, das, um ein gerehtes urteil zu fällen, man rihtig zu begreifen ferstehen mus, alein rihtige begriffe ebenſowenig bei den geistlihen der menshen als bei den matematikern zu erkennen ſind, woher ſih di einen wi di andern ferhalten, und werden daher alle, eben weil ſi niht reht begreifen, das unrehte reht, das rehte aber unreht finden müssen und am ende alle dazu kommen, den gerehten als einen ungerehten (einen mörder) zu ferurteilen, den ungerehten (den mörder) aber loszulassen. Das ist eine notwendige folge des unrihtigen begreifens, und haben daher alle menshen, da kein mensh das rehte begreift, fon jeher das rehte ferurteilt, das niht rehte für das rehte gehalten, und werden es bis zum ende der welt niht anders mahen. —

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.